Vektorfelt: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix}$ for $F_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ ← skriver disse som kolonnevektorer

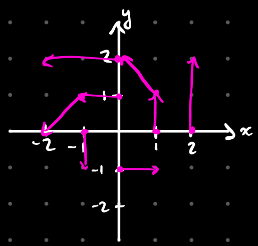
Visualisering for $n = m = 2$: $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{bmatrix}$

For hvert punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ har vi: $\vec{F}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vi tegner vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ slik at den starter i (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ skeche vektorfeltet ved å plotte $\vec{F}(\vec{x})$ for mange $\vec{x}$'er.

Eksempel: $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$



(x,y)	$\vec{F}(x,y)$
$(1,0)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$(0,1)$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(-1,0)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$(0,-1)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(x,y)	$\vec{F}(x,y)$
$(2,0)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
$(0,2)$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(1,1)$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$(-1,1)$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Anvendelser: vindkart (se: earth.nullschool.net)
vannstrømmer

Derivasjon:

Fra tidligere, husk gradienten: for $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ har vi $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$ ← skriver som radvektor

For $\vec{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{x}) \end{bmatrix}$ er jacobimatrisen til $\vec{F}$ er definert som

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Diverse notasjoner: $J_{\vec{F}}$, $D\vec{F}$, ...

Hvis $m = 1$, har vi $\vec{F}'(\vec{x}) = \nabla F_1(\vec{x})$

Hvis $m = n$ er $\vec{F}'(\vec{x})$ kvadratisk og vi kan finne jacobideterminanten, det $\vec{F}'(\vec{x})$.

Eksempel: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} xy^3 \\ e^{x+y^2} \\ 3x^2y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $F_1(x,y) = xy^3$, $F_2(x,y) = e^{x+y^2}$, $F_3(x,y) = 3x^2y$

$$\Rightarrow \vec{F}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ e^{x+y^2} & 2ye^{x+y^2} \\ 6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$$

Eksempel: $\vec F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec F(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ 2y^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec F'(\vec x) = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow \det \vec F'(\vec x) = y \cdot 6y - 0 \cdot x = \underline{\underline{6y^2}}$

Kjerneregelen:

For $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h(x) := f(g(x))$ har vi $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

For vektorfelt: $\vec F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, la $\vec H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\vec H(x_1, \dots, x_k) = \vec F(\vec G(x_1, \dots, x_k))$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec H'(\vec x)}_{\text{jacobimatrisen til } \vec H \text{ i punktet } \vec x} = \underbrace{\underbrace{\vec F'(\vec G(\vec x))}_{\text{jacobimatrisen til } \vec F \text{ i punktet } \vec G(\vec x)} \underbrace{\vec G'(\vec x)}_{\text{jacobimatrisen til } \vec G \text{ i punktet } \vec x}}_{\text{matriseprodukt av jacobimatriser}}$$

Eksempel: (TMA4101 Testeksamen 1 host 2021)

$$\vec F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ (x_1+x_2)^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \vec G(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{bmatrix} \qquad \vec H(\vec z) = \vec F(\vec G(\vec z))$$

$$\Rightarrow \vec F'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2(x_1+x_2) & 2(x_1+x_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec F'(\vec G(z_1, z_2, z_3)) = \vec F'(-z_1 - z_2,\ z_1 + z_2 + z_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2z_3 & 2z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec G'(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec H'(z_1, z_2, z_3) = \vec F'(\vec G(z_1, z_2, z_3))\, \vec G'(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2z_3 & 2z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativt: $\vec H(\vec z) = \vec F(\vec G(\vec z)) = \vec F(-z_1 - z_2,\ z_1 + z_2 + z_3) = \begin{bmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_3^2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec H'(\vec z) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$