2. ordens differensialligninger (funksjoner av én variabel)

Diff.ligning = ligning hvor den ukjente en funksjon $y(t)$ og ligningen inneholde $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots$

Har sett : 1. ordens , $\dot{x} + ax = p$, med og uten initial betingelser $x(0) = x_0$
systemer av 1. ordens , $\dot{\vec{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}$
ikke-lineære (løst w/ numerikk)

I dag : 2. ordens ordinære lineære diffligninger $\Rightarrow$ generell form : $\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t)$

2. ordens: ligningen har $\ddot{y}(t)$; ordinære: én ukjent; lineære: koeff. er konstante

b, c konst.

Først : den homogene ligningen $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ $[f(t) = 0]$

Løsninger til dette kalles de homogene løsningene.

Viktig : • Vi forventer to forskjellige løsninger $y_1(t)$ og $y_2(t)$
• Lineærkombinasjoner av løsninger er også løsninger

$\Rightarrow$ vi leter vi etter generell løsning $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$

For å løse $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$, bruk kvalifisert gjetning $y(t) = e^{\lambda t}$ for en forløpig ukjent λ
Sett denne inn i ligningen $\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = (\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$
$e^{\lambda t} \neq 0 \Rightarrow$ må ha $\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow$ løs med abc-formelen

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tre muligheter:

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er reelle tall : $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ $\Rightarrow$ $y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

(2) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ er reelt : $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = te^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ $y(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} = (A + Bt)e^{\lambda t}$

(3) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er komplekse tall : $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ $\Rightarrow$ $y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

La $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$

bruk Eulers formel

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t + \beta i t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$
$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

Siden lineærkombinasjoner av løsninger er løsninger :

$$\frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)) = \frac{1}{2} \cdot 2e^{\alpha t}\cos(\beta t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$\frac{1}{2i}(y_1(t) - y_2(t)) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

$\Rightarrow$ vi kan bruke disse som $y_1(t)$ og $y_2(t)$, $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$\Rightarrow \lambda = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$

Oppsummering:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $y(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$
- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ($\lambda = \alpha + \beta i$): $y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$

Vi ender alltid opp med to ukjente konstanter.
For å finne spesielle løsninger, så trenger vi to initialbetingelser: $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = b$
(a og b er gitt)

Eksempel: $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 0$ $\quad y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = -4$

$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow$ generell løsning: $y(t) = Ae^{4t} + Be^{t}$ $\qquad \dot{y}(t) = 4Ae^{4t} + Be^{t}$

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 2 \\ \dot{y}(0) = 4A + B = -4 \end{cases} \Rightarrow B = 2 - A$$

$\Rightarrow 4A + 2 - A = 3A + 2 = -4 \Rightarrow 3A = -4 - 2 = -6 \Rightarrow A = -2$

$\Rightarrow B = 2 - (-2) = 4$

$\Rightarrow y(t) = -2e^{4t} + 4e^{t}$

Bonus sjekk:
- $\ddot{y}(t) - 5\dot{y}(t) + 4y(t) = (-32e^{4t} + 4e^{t}) - 5(-8e^{4t} + 4e^{t}) + 4(-2e^{4t} + 4e^{t})$
  $= -32e^{4t} + 4e^{t} + 40e^{4t} - 20e^{t} - 8e^{4t} + 16e^{t} = 0$ ✓
- $y(0) = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2$ ✓
- $\dot{y}(0) = -8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = -4$ ✓

Inhomogen ligningn: $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$

Generell løsning $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$y_h(t)$ = "homogene løsningen", finn $y_h(t)$ ved å løse den homogene versjonen av ligningen
(sett $f(t) = 0$ og løs)

$y_p(t)$ = "partikulær løsningen"

For å finne y_p, har to måter: (1) variasjon av parametre [regn ut $y_p(t)$, en del arbeid...]
(2) ubestemte koeffisienters metode [gjett $y_p(t)$ basert på $f(t)$]

For (2), vi gjetter på at $y_p(t)$ ligner veldig på $f(t)$. Slå opp i en tabell

$r(t)$	$y_p(t)$
$ke^{\lambda t}$	$Ae^{\lambda t}$
kt^n	$A_n t^n + \cdots + A_0$
$k\cos(\omega t)$, $k\sin(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
$ke^{\lambda t}\cos(\omega t)$, $ke^{\lambda t}\sin(\omega t)$	$e^{\lambda t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$

Når vi gjetter $y_p(t)$, har vi noen konstanter. Vi vil ikke ha flere enn de vi får fra y_h, så vi vil bli kvitt konstantene fra y_p.

Sett inn y_p inn i ligningen $\Rightarrow$ $\ddot{y}_p + b\dot{y}_p + cy_p = f(t)$
Velg koeffisienten på venstre side slik at venstre- og høyresiden blir lik.

Hvis gjort riktig ender vi opp med $y_p(t)$ uten ukjente konstanter.

<u>Eksempel:</u> $\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 6 - 8t$

$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow y_h(t) = Ae^{4t} + Be^{-2t}$

$f(t) = 6 - 8t \leftarrow$ 1. grads polynom $\Rightarrow$ gjetter $y_p(t) = Ct + D$

Sett inn i ligningen: $\ddot{y}_p(t) - 2\dot{y}_p(t) - 8y_p(t) = 0 - 2C - 8(Ct + D) = -8Ct + (-2C - 8D) = -8t + 6$

$\Rightarrow \begin{cases} -8C = -8 & \Rightarrow C = 1 \\ -2C - 8D = 6 & \Rightarrow -2 - 8D = 6 \Rightarrow 8D = -8 \Rightarrow D = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(t) = t - 1$

$\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{4t} + Be^{-2t} + (t-1)$

<u>Eksempel:</u> $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 30e^{-2t}$

$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

$f(t) = 30e^{-2t} \Rightarrow$ gjetter $y_p(t) = Ce^{-2t}$, men dette er ikke lineært uavhengig fra $y_h(t)$

For å sikre lineær uavhengighet, bare gang gjetningen med t $\Rightarrow y_p(t) = Cte^{-2t}$

$\dot{y}_p(t) = Ce^{-2t} - 2Cte^{-2t}$
$\ddot{y}_p(t) = -2Ce^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 4Cte^{-2t} = -4Ce^{-2t} + 4Cte^{-2t}$

$\Rightarrow \ddot{y}_p(t) + 3\dot{y}_p(t) + 2y_p(t) = -4Ce^{-2t} + 4Cte^{-2t} + 3Ce^{-2t} - 6Cte^{-2t} + 2Cte^{-2t} = -Ce^{-2t} = 30e^{-2t}$

$\Rightarrow \; -C = 30 \quad \Rightarrow \quad C = -30$

$\Rightarrow \; y_p(t) = -30te^{-2t}$

$\Rightarrow \; y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} - 30te^{-2t}$