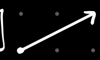
# Vektorrom

Fram til nå: vektorer ser ut som $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. E.g. $n=2$, kan vi tegne vektorer som piler

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 

I dag: prøve å forstå vektorer abstrakt
$\Rightarrow$ vil føre til at andre ting også er vektorer

Vil definere vektorrom

**Algebraisk struktur**:
- en mengde elementer $S \neq \emptyset$ ($S$ er ikke tomt)
- minst én operasjon på $S$
- aksiomer (regneregler)

Eksempel: $\mathbb{F}$ er en **kropp** (eng. "**field**") hvis vi har to binæroperasjoner $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ kalt addisjon og multiplikasjon (for $x, y \in \mathbb{F} \Rightarrow x+y \in \mathbb{F}$ og $x \cdot y \in \mathbb{F}$), og $\mathbb{F}$ tilfredsstiller følgende aksiomer:

$\exists 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ $(x + 0_{\mathbb{F}} = x)$, $\exists 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ $(x \cdot 1_{\mathbb{F}} = x)$, inverser (hvis $x \in \mathbb{F} \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{F}$)
$x + y = y + x$, $xy = yx$, $a + (b+c) = (a+b) + c$, $a(b+c) = ab + ac$

eksempler på kropper: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$ ← den endelige kroppen med $p$ elementer
$p$ primtall

(kropper blir viktig for vektorrom)

$\mathbb{Z}$ er ikke en kropp (har ikke inverser, e.g. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

Eksempel: Boolsk algebra $B$, to binæroperasjoner $B \times B \to B$, for $a, b \in B$
$\Rightarrow$ $a \wedge b \in B$ ("og"), $a \vee b \in B$ ("eller")
operasjon $B \to B$, $a \in B \Rightarrow \neg a \in B$ ("komplement")
vi har $0_B = \bot$ ("bottom"), $1_B = \top$ ("top")
+ regneregler

Vektorrom: $V \neq \emptyset$ er en mengde, $\mathbb{F}$ er kropp.
Vi har addisjon $V \times V \to V$, $u + v \in V$, og vi har skalarmultiplikasjon $\mathbb{F} \times V \to V$
$av \in V$

$V$ er et **vektorrom** hvis følgende aksiomer er tilfredsstilt:
- assosiativitet: $\forall u, v, w \in V$, $u + (v+w) = (u+v) + w$
- kommutativitet: $\forall u, v \in V$, $u + v = v + u$
- nullvektor: $\exists 0_V \in V$ sånn at $\forall v \in V$ har vi $0_V + v = v$
- inverser: $\forall v \in V \Rightarrow \exists -v \in V$ sånn at $v + (-v) = 0_V$ (skriver ofte $v + (-v) = v - v$)
- addisjon og skalarmultiplikasjon er kompatible:
  $\forall a, b \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$ har vi $a(bv) = (ab)v$
- distribusjon av skalarmult. mhp addisjon: $\forall a \in \mathbb{F}$, $\forall u, v \in V$, $a(u+v) = au + av$
- distribusjon av skalarmult. mhp skalarmult.: $\forall a, b \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$, $(a+b)v = av + bv$
- multiplikasjon med $1_{\mathbb{F}}$: $\forall v \in V$, $1_{\mathbb{F}} v = v$

En **vektor** er et element i et vektorrom. $v \in V$

Merk: ingen vektormultiplikasjon. Kan ha produkter av vektorer, men må ikke ha det.
Skalarprodukt er eksempel på produkt av vektorer.

Eksempel: Vil vise $\forall v \in V$ har vi $0_{\mathbb{F}} v = 0_V$:

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{F}} v &= (0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}}) v \\ &= 0_{\mathbb{F}} v + 0_{\mathbb{F}} v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0_{\mathbb{F}} v + (-0_{\mathbb{F}} v) = 0_V$$

$$\|$$

$$(0_{\mathbb{F}} v + 0_{\mathbb{F}} v) + (-0_{\mathbb{F}} v) = 0_{\mathbb{F}} v + (0_{\mathbb{F}} v + (-0_{\mathbb{F}} v)) = 0_{\mathbb{F}} v + 0_V = 0_{\mathbb{F}} v$$

$$\Rightarrow \quad 0_{\mathbb{F}} v = 0_V$$

Kan vi bruke $0_{\mathbb{F}} v = 0_V$ som et aksiom i stedet for inverser, og så vise at inverser finnes.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Viktig: lineærkombinasjoner av vektorer er også vektorer} \\ \qquad a, b \in \mathbb{F}, \quad u, v \in V \quad \Rightarrow \quad au + bv \in V\end{array}}$$

Eksempler:

- $V = \mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{n}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Dette er vektorene vi kjenner fra før, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $v_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$
  For gøy: sjekk at $\mathbb{R}^2$ er et vektorrom
- $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Så for $n=2$ har vi $v = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix}$
- Løsninger på homogene diffligninger (uten initialkrav) er vektorrom,
  e.g. i forrige uke: $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{4t} + Be^{t}$ ← generell form for vektorer

Mye av det vi har lært om lineær algebra fungerer fortsatt!

Lineær uavhengighet: $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ er lineært uavhengige hvis

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$$

Basis: en mengde vektorer $\{v_1, \ldots, v_n\}$ i $V$ er en basis for $V$ hvis:

- de er lineært uavhengige
- enhver vektor i $V$ kan skrives som som en lineærkombinasjon av $v_1, \ldots, v_n$:
  $\forall w \in V$, $\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ sånn at $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = w$

Basiser funger som byggesteinene i $V$. Kravet om lineær uavhengighet gjør at hver vektor i $V$ kan skrives som en lineær kombinasjon av basisen på en unik måte.

Merk: basiser er ikke unike!

Men antallet vektorer i en basis er unikt. Dette tallet er dimensjonen til $V$, $\dim_{\mathbb{F}} V$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}^2$ har basis $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da har vi $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
  Annen basis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbb{R}^n$ har <u>standard basis</u> $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

- $\mathbb{C}$. Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, har $\mathbb{C}$ basis $\{1\}$ $\quad z = (a+bi) = (a+bi) \cdot 1$ $\quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
  Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, har $\mathbb{C}$ basis $\{1, i\}$ $\quad z = a+bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

  Mer generelt, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ og $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

- Polynomer av grad $\leq n$, koeff. i $\mathbb{F}$: $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \cdot \underset{= x^0}{1}$ $\Rightarrow$ basis $\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$
  $\dim_{\mathbb{F}} V = n+1$
- Polynomringen $\mathbb{F}[x]$
- $A$ matrise, $\lambda$ egenverdi $\Rightarrow$ egenvektorene er basis for et vektorrom, egenrommet

- Homogene andreordens diffligninger: $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \Rightarrow y_1$ og $y_2$ lineært uavhengige
  gen. løsning $Ay_1 + By_2 \Rightarrow \{y_1, y_2\}$ basis

  ↳ hvis $\lambda$ er dobbeltrot, måtte vi gange løsningen med $t$
  dette var for å sikre nok løsninger til basisen

  ↳ når $\underset{= \alpha \pm \beta i}{\lambda_i} \in \mathbb{C}$, $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$. Men vi skrev om, fikk $y_1 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$
  dette funket fordi basis ikke er unike

  merk: hvis $\lambda = \pm i \Rightarrow y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t \Rightarrow \cos t$ og $\sin t$ er vektorer