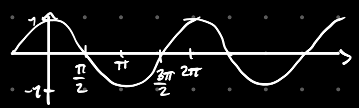
Fourierrekker

Tidligere: hvis f er ∞-deriverbar, kan vi finne taylorrekken til f
hvis f er glatt da er f lik taylorrekken sin

I dag: fourierrekker, de brukes til å studere periodiske funksjoner

Periodiske funksjoner: f er <u>periodisk</u> med periode P hvis $f(t+P) = f(t) \quad \forall t$

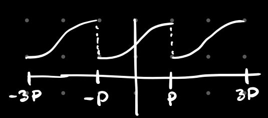
Eksempel: trigonometriske funksjoner



$\cos(t + 2\pi k) = \cos(t) \Rightarrow \cos$ er 2π-periodisk
Det samme gjelder sin
tan er π-periodisk

Hvis vi har en funksjon som ikke er periodisk, så kan vi lage en periodisk utvidelse av funksjonen.

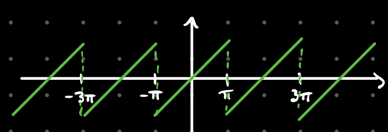
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke periodisk



$\rightsquigarrow f: [-P, P) \to \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow$ kopier verdien av f på $[-P,P)$ slik at f blir periodisk
$\rightsquigarrow$ får $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er $2P$-periodisk

Eksempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$ er ikke periodisk. Vi ser heller på $g: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $g(t) = t$

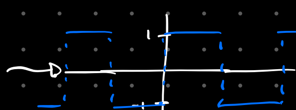
Den 2π-periodiske utvidelsen av g er da
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = g(t + 2\pi k)$ hvor $k \in \mathbb{Z}$ er slik at $0 \le t + 2\pi k < 2\pi$



$\leftarrow$ dette kalles sagtannbølgen (sawtooth wave)

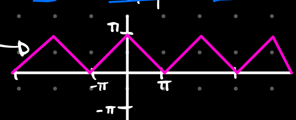
Andre eksempler:

- $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$



firkantbølgen

- $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \pi + t & t < 0 \\ \pi - t & t \ge 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$



trekantbølgen

Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig deriverbar, $2P$-periodisk funksjon. Da er **fourierrekken** til f gitt på en av følgende former:

- reell form: $f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{P}\right)$

hvor $a_0 = \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} f(t)\, dt$ $\leftarrow$ noen har ikke 2 i neuneren, men skriver $\frac{a_0}{2}$ i rekken

$a_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^{P} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{P}\right) dt$

$b_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^{P} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{P}\right) dt$

- komplekls form: $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n t}{P}}$ hvor $c_n = \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(t)\, e^{-i\frac{n\pi t}{P}}\, dt$
- amplitude - fase form: $f \sim d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi t}{P} - \varphi_n\right)$

For å finne fourierrekken til f, regn ut koeffisienten og så skriv opp rekken.
Alle versjonene av fourierrekken til f uttrykker det samme. Hvilken du vil bruke er preferanse.

For reell form, så regner vi ofte a_0 og a_n, $n \geq 1$ separat

Noen bruker periode P, da dukker det opp flere 2-ere i formlene

Hvis vi vet én av formene, kan vi regne om koeffisienten for å finne de andre:

- $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ og $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$
- $a_n = c_n + c_{-n}$ og $b_n = (c_n - c_{-n})i$
- $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & a>0 \\ \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)+\pi & a<0,\ b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)-\pi & a<0,\ b<0 \\ \frac{\pi}{2} & a=0,\ b>0 \\ \frac{3\pi}{2} & a=0,\ b<0 \end{cases}$ ← sammenlign med utregning av polarform av komplekse tall (uke 3)

Når $P = \pi$, blir formlene enklere:

- $f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt$$

- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$

Odde og jevne funksjoner: f er jevn hvis $f(-t) = f(t)$ $\forall t$
g er odde hvis $g(-t) = -g(t)$ $\forall t$

Eksempel: cos er jevn og sin er odde

Produkter:

·	jevn	odde
jevn	jevn	odde
odde	odde	jevn

(sammenlign produkter av negative og positive tall)

f jevn $\Rightarrow \int_{-A}^{A} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{A} f(t)\,dt$ $\qquad$ g odde $\Rightarrow \int_{-A}^{A} g(t)\,dt = 0$

Eksempel: $f:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R},\ f(t)=t$ $\leadsto$ se på 2π-periodiske utvidelsen

$$f(-t) = -t = -f(t) \quad \Rightarrow f \text{ er odde}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{\text{odde}}{f(t)}\,dt = 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{odde}}{\overbrace{f(t)}}\ \overset{\text{jevn}}{\overbrace{\cos(nt)}}}_{\text{odde}}\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{odde}}{\overbrace{f(t)}}\ \overset{\text{odde}}{\overbrace{\sin(nt)}}}_{\text{jevn}}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \overset{v}{t}\ \overset{u'}{\sin(nt)}\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cancelto{0}{\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}\right)$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left[-\frac{\cancel{\pi}\cos(n\pi)}{n} + 0\right] = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

n partall $\Rightarrow \cos(n\pi) = 1 = (-1)^n$

n oddetall $\Rightarrow \cos(n\pi) = -1 = (-1)^n$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n} & n \text{ oddetall} \\ -\frac{2}{n} & n \text{ partall} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$$

Hvis vi ser på partialsummer, så øvre grense $N<\infty$ i summen, kan vi plotte og sammenligne med $f(t)$ [se kode]

I eksempelet så vi at f er odde og vi endte bare opp med $b_n\sin$-leddene.
På samme vis, en jevn funksjon har fourierrekke med $b_n=0$ og $a_n\neq 0$ (bare $a_n\cos$-ledd)

Hvis vi har $f:[0,P)\to\mathbb{R}$ kan vi lage en jevn eller odde funksjon fra f:

- odde utvidelsen av f: $f_o:[-P,P]\to\mathbb{R},\ f_o(t) = \begin{cases} f(t) & t\geq 0 \\ -f(-t) & t<0 \end{cases}$ $\leftarrow$ odde

  $\Rightarrow$ fourierrekken til f_o kalles sinusrekken til f

- jevne utvidelsen av f: $f_j:[-P,P]\to\mathbb{R},\ f_j(t) = \begin{cases} f(t) & t\geq 0 \\ f(-t) & t<0 \end{cases}$ $\leftarrow$ jevn

  $\Rightarrow$ fourierrekken til f_j kalles cosinusrekken til f

Eksempel: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1 \leftarrow$ konstant $\qquad P=1$

- jevn utvidelse: $f_j : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_j(t) = \begin{cases} f(t) = 1 & t \geq 0 \\ f(-t) = 1 & t < 0 \end{cases} = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 \, dt = \frac{1}{2}[t]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{1}\right) dt = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin(n\pi)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin(-n\pi)}}}{n\pi}\right] = 0$$

$b_n = 0$ fordi $1 \cdot \sin$ er odde

$\Rightarrow f_j \sim 1$

- odde utvidelsen: $f_o : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_o(t) = \begin{cases} f(t) = 1 & t \geq 0 \\ -f(-t) = -1 & t < 0 \end{cases}$

$a_0 = a_n = 0$ fordi f_o og $f_o \cdot \cos$ er odde

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_o(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{1}\right) dt = \int_0^1 1 \cdot \sin(n\pi t)\, dt + \int_{-1}^{0} -1 \cdot \sin(n\pi t)\, dt$$

$$= \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(0) - \cos(-n\pi)}{n\pi}$$

$$= \frac{2 - 2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ oddetall} \\ 0 & n \text{ partall} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_o \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\pi t)$$

summen etter "=" er det samme som før, bare at vi hopper over når n er partall. Det funker fordi $b_n = 0$ når n er partall, så vi går ikke glipp av noe.

k	$n = 2k-1$
1	1
2	3
3	5
4	7
$\vdots$	$\vdots$

Summen med k er dermed litt finere fordi den ikke har noen overflødige ledd.