2. ord. lin. diff. likn. på std. form, IVP

(1) $\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = r(t)$, $f(0) = a$, $f'(0) = b$

Har generell løsning

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Der y_p er en partikulær løsning av (1), og y_h er den homogene løsningen, altså løsningen av

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$$

Bevis: Anta $y_p(t)$ er en løsning av (1). Anta så en annen vilkårlig løsning av (1), si $f(t)$. Vi har da ved å sette inn $f - y_p$ i (1) at

$$(f - y_p)'' + p(f - y_p)' + q(f - y_p)$$
$$= f'' + pf' + qf - (y_p'' + py_p' + qy_p) = r(t) - r(t) = 0$$

Altså er $f(t) - y_p(t)$ en løsning av den homogene likn. (2).
Har da $f(t) - y_p(t) = y_h(t) \iff f(t) = y_h(t) + y_p(t)$ $\square$

Vi trenges altså 2 ting, en partikulær løsning og en homogen løsning.

Først homogen fordi den er mye lettere

Settes inn $y(t) = e^{\lambda t}$ og får

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t} = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Får 3 muligheter:

2 reelle røtter: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1(t) = Ae^{\lambda_1 t}, \ y_2(t) = Be^{\lambda_2 t}$$

Superposisjon gir generell løsning som

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

1 reell rot, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(p^2 - 4q = 0)$

Ved innsetting er $y(t) = te^{\lambda t}$ også en løsning, slik at

$$y(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

blir den generelle løsningen.

2 komplekse røtter, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = a + i\omega$, $\lambda_2 = a - i\omega$

Får da med superposisjon at den generelle løsningen er

$$y(t) = Ae^{(a+i\omega)t} + Be^{(a-i\omega)t}$$

som gjerne skrives

$$y(t) = e^{at}(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) \qquad \text{(ref Therese)}$$

For partikulær løsning TABELL

(ref ørke notat)

Fungerer ikke for alle

Eks: $\ddot{y} + 9y = 6t^2$, $y_h(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$

Gjetter $y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$, setter inn og får

$$2A_2 + 9A_2 t^2 + 9A_1 t + 9A_0 = 6t^2 + 0t + 0$$

$\Rightarrow A_2 = \frac{2}{3}$, $A_1 = 0$, $A_0 = -\frac{4}{27}$

Får dermed partikulærløsningen

$$y_p(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{27}$$

Generell løsning:

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{27}$$

$$L\ddot{I}(t)+R\dot{I}(t)+\frac{1}{C}I(t)=\dot{V}_s(t), \quad V_s(t)=V_0\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0$$

$$\lambda=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}, \quad \dot{V}_s(t)=\omega V_0\cos(\omega t)$$

Antar $y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t \Rightarrow$

$$-\omega^2 LA+\omega RB+\frac{1}{C}A=\omega V_0$$

$$-\omega^2 LB-\omega RA+\frac{1}{C}B=0, \quad X=\omega L-\frac{1}{\omega C}$$

Får $\left.\begin{aligned} BR-AX&=V_0\\ AR+BX&=0\end{aligned}\right\}$ $A=-\frac{V_0 X}{R^2+X^2}$ $B=\frac{V_0 R}{R^2+X^2}$

$$I(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}-\frac{V_0X}{R^2+X^2}\cos(\omega t)+\frac{V_0R}{R^2+X^2}\sin(\omega t)$$

$$=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(e^{i\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}+e^{-i\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\right)$$

$$-\frac{V_0X}{R^2+X^2}\cos(\omega t)+\frac{V_0R}{R^2+X^2}\sin(\omega t)$$

$$\frac{1}{C_1} I + \frac{1}{C_2} I + \dot{I} R = \dot{V}$$

$$\chi = \frac{\frac{1}{C_1} + 1}{R}$$

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) I + R \dot{I} = 0$$

$$\dot{I} = -\chi I$$

$$\int \frac{\dot{I}}{I} \, dt = -\int \chi \, dt$$

$$\int \frac{1}{I} \, dI = -\chi t + C$$

$$\ln I = -\chi t + C_1$$

$$I = A e^{-\chi t}$$

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = I_p$$

$$\frac{A}{C_1}\cos\omega t + \frac{B}{C_1}\sin\omega t$$

$$+\frac{A}{C_2}\cos\omega t + \frac{B}{C_2}\sin\omega t$$

$$+\frac{A}{C_1}\cos\omega t + \frac{A}{C_1}\sin\omega t$$

$$+\frac{A}{C_1}\cos\omega t + \frac{A}{C_1}\sin\omega t$$