

# Projeksjonssatsen

H.E.K., IMF oktober 2004

De aller viktigste vektorrommene som fins, er de som har et skalarprodukt, slik at vi kan snakke om ortogonale vektorer og ortogonale underrom (ortogonale komplement). For å lære seg selve teorien, er det for alle praktiske formål nok å tenke på  $\mathbb{R}^n$  og underrom av  $\mathbb{R}^n$ .

Foruten at det fins ortogonale basiser, er den viktigste setningen i slike rom *projeksjonssatsen*, som i E.P. er diskutert i avsnitt 5.2, og dermed ikke en del av pensum i det nåværende opplegget. Setningen er enkel både å formulere og bevise, men har mange viktige praktiske anvendelser:

- data-analyser
- video-, bilde- og lydforbedringsalgoritmer
- varsling- og prediksjonsmodeller for alt fra svevestøv til aksjekurser
- optimal styring av industriprosesser
- autopilotstyring av fly
- dynamisk posisjonering av skip og borerigger

- for bare å nevne noen få. Skjelden har Rema 1000-slagordet vært mer relevant enn her!

Anta at  $V \subset \mathbb{R}^n$  er et underrom som vi kan si er radrommet til en matrise  $A$ ,  $V = \text{Row}(A)$ . Vi vet dermed at det ortogonale komplementet  $V^\perp = \text{Null}(A)$ . Vi kan anta at  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  er en basis for  $V$  og  $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  en basis for  $V^\perp$  (Tilsammen blir disse basisene en basis for *hele*  $\mathbb{R}^n$ , siden  $\dim(\text{Row}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) = n$ ).

Hvis  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , kan vi dermed skrive

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k + c_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + c_n \mathbf{v}_n \\ &= (c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k) + (c_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + c_n \mathbf{v}_n) \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{p} \in V, \quad \mathbf{e} \in V^\perp.\end{aligned}\tag{1}$$

Vektoren  $\mathbf{p}$  kalles *projeksjonen av  $\mathbf{x}$  på  $V$* , mens  $\mathbf{e}$  kalles *projeksjonsfeilen*, eller bare *feilen*. Projeksjonen  $\mathbf{p}$  er det nærmeste vi kommer  $\mathbf{x}$  hvis vi bare har lov til å bevege oss i  $V$ . Beviset for dette er heller ikke så vanskelig: Hvis  $\mathbf{p}'$  er en annen vektor i  $V$ , vil  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$  også ligge i  $V$  og dermed være ortogonal på  $\mathbf{e}$ . Dermed blir, etter Pytagoras,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{p}'|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = |\mathbf{e} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = |\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2,$$

som naturligvis blir minst mulig når  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$  (Dette er Theorem 1 s. 225 i E.P.). På grunn av denne egenskapen blir  $\mathbf{p}$  også kalt *den beste tilnærmelsen* (eller *approsimasjonen*) til  $\mathbf{x}$  i  $V$ . Vektoren  $\mathbf{p}$  løser med andre ord problemet

$$\min_{\mathbf{p}'} |\mathbf{x} - \mathbf{p}'|.$$

En annen viktig egenskap til  $\mathbf{p}$ , som vi også leser ut fra lign. (1), er at feilen,  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$  ligger i  $V^\perp$ , og dermed er *ortogonal på hele  $V$* . Denne egenskapen er nyttig når vi skal bruke setningen.

Det er videre klart fra (1) at det bare er én måte å skrive  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{e}$  på, slik at  $\mathbf{p} \in V$ ,  $\mathbf{e} \in V^\perp$ . Dette kan en forøvrig se ved å anta at  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{e} = \mathbf{p}' + \mathbf{e}'$ . Da blir  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$  liggende både i  $V$  og  $V^\perp$ , og er følgelig lik  $\mathbf{0}$ . Hele satsen blir dermed:

*Hvis  $V$  er et underrom av  $\mathbb{R}^n$  og  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , kan  $\mathbf{x}$  skrives på en entydig måte som  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{e}$ , der  $\mathbf{p}$  er beste approximasjon til  $\mathbf{x}$  i  $V$ , mens feilen  $\mathbf{e}$  er ortogonal på  $V$ .*

For å bruke satsen er det ikke alltid nødvendig å finne basisvektorene i lign. (1).

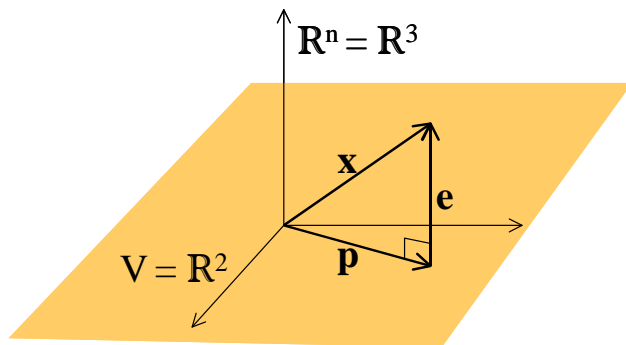


Figure 1: Skissen illustrerer projeksjonssatsen: Vektoren  $\mathbf{x}$  ligger i  $\mathbb{R}^3$ , og  $V$  er  $(x, y)$ -planet. Projeksjonen  $\mathbf{p}$  ligger i  $V$ , mens  $\mathbf{e}$  er ortogonal på  $V$ , og følgelig parallell med  $z$ -aksen.

## Et eksempel: Minstekvadrat-løsninger

Anta at vi eksperimenterer med å lage en legering som har  $n$  komponenter  $C_1, \dots, C_n$ . For hver legering måler vi bruddstyrken  $b$ . Vi ser at bruddstyrken varierer når sammensetningen varierer, og hvis vi lar  $c_1, \dots, c_n$  være fraksjonene til de ulike komponentene, kan vi forvente at det fins en funksjon  $f$  slik at

$$b = f(c_1, \dots, c_n).$$

Ingen målinger er uten målefeil, slik at det er lite håp om å komme fram til en eksakt form på  $f$ . Som en start kunne det vært fint om vi fant "vekter"  $x_1, \dots, x_n$ , slik at vi var i stand til å forutsi bruddstyrken så godt som mulig:

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \approx b.$$

Hvis vi gjør mindre enn  $n$  eksperimenter, vil det normalt være mulig å finne et sett  $x$ -er som passer til alle eksperimentene, men løsningen vil ikke være entydig. Med akkurat  $n$  eksperimenter kunne vi til og med finne en entydig løsning, men ville dette nødvendigvis være en god løsning, - som også holdt hvis vi fortsatte med flere eksperimenter? Vanligvis ikke, og for å få et mer pålitelig beslutningsgrunnlag, vil vi, så vidt mulig, gjøre  $m > n$  eksperimenter og registrere sammensetning og bruddstyrke for hvert eksperiment. Dataene samler vi i matrisen  $A$  og vektoren  $\mathbf{b}$ :

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nå vil det generelt være umulig å finne en  $\mathbf{x}$  slik at  $A\mathbf{x}$  blir nøyaktig lik  $\mathbf{b}$ , men kanskje kan vi finne en vektor  $\mathbf{x}$  slik at feilen  $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$  blir så liten som mulig? Siden vi alltid har  $A\mathbf{x} \in \text{Col}(A)$ , bør vi altså velge  $\mathbf{x}$  slik at  $A\mathbf{x}$  blir *beste approksimasjon* til  $\mathbf{b}$  i  $\text{Col}(A)$ . I så fall vil feilen  $\mathbf{e} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  være *ortogonal* på  $\text{Col}(A)$ , med andre ord,

$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0.$$

Dette gir oss et ligningssystem for  $\mathbf{x}$  (i bare  $n$  variable!):

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}. \quad (2)$$

Ligningen vi har utledet kalles *normal-ligningene*, og løsningen *minstekvadrat-løsningen* (For at ligningen alltid skal ha løsning, må vi passe på at  $\text{rank}(A) = n$ ). Navnet er ikke så unaturlig, siden det i dette tilfelle også er enkelt å utlede ligningen direkte ved å løse minimeringsproblemet

$$\min_{\mathbf{x}} |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 = \min_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2 \right\}$$

Hvordan fungerer så dette?

I tabellen nedenfor er det simulerte sammensetninger (de seks første kolonnene) og bruddstyrker (siste kolonne). Matrisen  $A$  er  $20 \times 6$ , mens  $\mathbf{b}$  er  $20 \times 1$ .

```
0.1501 0.0706 0.2006 0.1036 0.2898 0.1853 2.5431
0.2634 0.0048 0.1746 0.0828 0.1791 0.2953 2.5878
0.3276 0.2047 0.0346 0.0494 0.1925 0.1912 2.7560
0.0191 0.3115 0.3617 0.0989 0.0952 0.1135 2.2501
0.2354 0.1422 0.1206 0.2229 0.1112 0.1677 2.4698
0.0574 0.1386 0.3027 0.1101 0.2184 0.1728 2.3597
0.2871 0.0680 0.2647 0.1989 0.0852 0.0962 2.0708
0.2031 0.1701 0.2177 0.0615 0.1554 0.1923 2.5017
0.1846 0.1554 0.2116 0.1608 0.1084 0.1793 2.4042
0.0500 0.3803 0.0750 0.0490 0.0329 0.4128 3.1884
0.2080 0.2376 0.0436 0.1229 0.2456 0.1423 2.7117
0.0359 0.3113 0.2363 0.2698 0.0142 0.1324 2.3075
0.1289 0.2361 0.0853 0.2334 0.0450 0.2713 2.7137
0.1778 0.1264 0.1205 0.2132 0.2022 0.1598 2.5488
0.0481 0.3256 0.1224 0.0886 0.0751 0.3403 2.9567
0.1816 0.0079 0.0038 0.3512 0.0985 0.3569 2.8241
0.0249 0.2229 0.1168 0.2114 0.1388 0.2852 2.8341
0.1886 0.3063 0.0801 0.0453 0.1560 0.2238 2.7873
0.2194 0.0158 0.3853 0.0625 0.1974 0.1196 2.0543
0.0727 0.0813 0.2578 0.2514 0.1779 0.1589 2.3051
```

Vi skal nå bestemme 6 "vektorer",  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_6]^T$ , slik at vi er i stand til å forutsi bruddstyrken så godt som mulig, og løser derfor normalligningene, lign. 2. Løsningen blir

$$\mathbf{x} = [1.9935 \ 2.9476 \ 0.9396 \ 1.9704 \ 3.0275 \ 4.0673]^T.$$

Dette var et fiktivt eksempel som ble laget vha. følgende Matlabprogram:

```
A = rand(20,6);      % Simulerer sammensetningen. Tilfeldige tall mellom 0 og 1.
A = diag(1./sum(A'))*A;  % Fraksjonene summerer seg opp til 1
x = [2 3 1 2 3 4]';    % Den "eksakte" løsningen
b = A*x + .02*randn(20,1); % Tilfeldig målefeil: .02*randn(20,1)
x = (A'*A)^(-1) * (A'*b) % Minstekvadrat-løsningen (skrevet ut)
```

Vi fant altså ikke helt de "eksakte" verdiene på  $\mathbf{x}$ . Avviket ville blitt mindre hvis vi gjorde enda flere eksperimenter og skaffet oss et bedre datagrunnlag. Avsnitt 5.2 i E.P. har flere anvendelser.

Anvendelsene som ble nevnt i starten er nok betydelig mer kompliserte, men projeksjonssatsen ligger i bunnen av alle!