TMA 4110 Matematikk 3
Høsten 2004
Svingeligningen med kompleks regnemåte

H.E.K., Inst. for matematiske fag, NTNU

Svingeligningen forekommer i mange sammenhenger, og ofte vil vi møte regning og utledninger der den påtrykte kraften, eller mer generelt *eksitasjonen* (høyresiden i ligningen), skrives

$$r(t) = ae^{i\omega t}.$$

Dette ser jo merkelig ut. Hvordan kan, for eksempel, en *reell* kraft være *kompleks*?

Hensikten med dette lille notatet er å "avmystifisere" regnemåten og vise at det ikke er helt uten grunn at den har blitt populær. Notatet kan godt gjemmes (eller glemmes) til en får bruk for det, for eksempel i forbindelse med dynamisk analyse av konstruksjoner.

Det hele er altså *kun* en litt smart måte å regne på. Samme beregning kan gjennomføres med reelle funksjoner (slik vi finner det i Kreyszig, avsn. 2.11), og sluttsvaret, - som er det som betyr noe, vil bli det samme.

Utgangspunktet er svingeligningen med en *periodisk eksitasjon*:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2c\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = a\cos(\omega t). \tag{1}$$

Her har vi allerede delt på massen, slik at ligningen er på *standardformen.*

Løsningen til lign. 1 kan skrives

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t), \tag{2}$$

der y_H er generell løsning av den homogene ligningen og y_P er en partikulærløsning. Vi har allerede sett hvordan vi finner y_H, og vet at hvis dempningen c er større enn 0, noe vi skal anta her, vil løsningen dø ut med tiden.

Ingeniører kaller $y_H(t)$ for *den transiente delen* av løsningen, eller bare *transienten.* Transienten avhenger av startbetingelsene. Etter at transienten har dødd ut, er løsningen lik y_P, og det er denne løsningen vi nå skal ta for oss.

Nedenfor bruker vi $\dot{y}$ og $\ddot{y}$ om de tidsderiverte. La oss videre skrive y_R og y_I om løsningene til ligningene

$$\ddot{y}_R + 2c\dot{y}_R + \omega_0^2 y_R = a\cos(\omega t), \tag{3}$$

$$\ddot{y}_I + 2c\dot{y}_I + \omega_0^2 y_I = a\sin(\omega t). \tag{4}$$

Vi multipliser den nederste ligningen med i og summerer. Dette gir oss

$$(\ddot{y}_R + i\ddot{y}_I) + 2c\left(\dot{y}_R + i\dot{y}_I\right) + \omega_0^2\left(y_R + iy_I\right) = a\left[\cos\left(\omega t\right) + i\sin\left(\omega t\right)\right] = ae^{i\omega t}.$$

Deretter setter vi

$$Y = y_R + iy_I,$$

slik at vi får *én kombinert ligning*,

$$\ddot{Y} + 2c\dot{Y} + \omega_0^2 Y = ae^{i\omega t}. \tag{5}$$

Når vi kjenner løsningen $Y(t)$ til ligning 5, finner vi altså løsningene til *både* ligning 3 og 4 ved å regne ut

$$\begin{aligned} y_R &= \mathrm{Re}\left(Y\right), \\ y_I &= \mathrm{Im}\left(Y\right). \end{aligned}$$

Fra ubestemte koeffisienters metode ser vi at partikulærløsningen til lign. 5 kan være på formen

$$Y_P\left(t\right) = Zae^{i\omega t},$$

der Z nå er en *kompleks* konstant. Dette setter vi inn i lign. 5 og får:

$$Za\left(\left(i\omega\right)^2 + 2c\left(i\omega\right) + \omega_0^2\right)e^{i\omega t} = ae^{i\omega t}$$

eller, etter å ha forkortet,

$$Z\left(\omega\right) = \frac{1}{-\omega^2 + 2c\left(i\omega\right) + \omega_0^2}. \tag{6}$$

Partikulærløsningen blir følgelig

$$Y_P\left(t\right) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ic\omega}ae^{i\omega t}.$$

Stort enklere kan det ikke bli, men vi må naturligvis regne ut realdelen av dette for å finne y_p i lign. 3 (og 1).

Konstanten Z, som altså er en funksjon av ω med c og ω_0 som parametre, kalles for en *transferfunksjon*. Vi kan skrive

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\left(2c\omega\right) = Re^{i\phi} \tag{7}$$

og ser da lett at

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2c\omega\right)^2}, \\ \phi &= \arctan\frac{2c\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Legg merke til (fra ligning 7) at siden c er større enn 0, vil vi ha:

$$\begin{aligned} \omega = 0 : &\quad \phi = 0, \\ 0 < \omega < \omega_0 : &\quad 0 < \phi < \tfrac{\pi}{2}, \\ \omega = \omega_0 : &\quad \phi = \tfrac{\pi}{2}, \\ \omega_0 < \omega : &\quad \tfrac{\pi}{2} < \phi < \pi, \\ \omega \to \infty : &\quad \phi \to \pi. \end{aligned}$$

Tilslutt finner vi

$$Z(\omega) = \frac{1}{R(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}} = \frac{1}{R(\omega)} e^{-i\phi(\omega)}, \tag{9}$$

og partikulærløsningen til lign. 1 blir følgelig

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathrm{Re}\,(Y_P(t)) \\ &= \mathrm{Re}\left(Zae^{i\omega t}\right) \\ &= a\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(\omega t-\phi)}}{R}\right) \\ &= \frac{1}{R(\omega)} a \cos\left[\omega t - \phi(\omega)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Vi finner altså $y_p(t)$ ganske enkelt ved å multiplisere eksitasjonen med en *forsterknings-faktor*,

$$|Z(\omega)| = \frac{1}{R(\omega)}, \tag{11}$$

og trekke fra en *fasevinkel*, $\phi(\omega)$, i argumentet for cosinus.

Funksjonene $|Z(\omega)|$ og $\phi(\omega)$ er tegnet opp for noen verdier av c/ω_0 i figur 1. Dette er figurer som fins i alle bøker om svingninger (en litt unøyaktig utgave er vist på s. 116 i Kreyszig. Merk også at der skrives ligningen med c istedet for $2c$).

På figur 2 er det vist noen få løsninger for problemet

$$\begin{aligned} y'' + 2cy' + \omega_0^2 y &= \cos(\omega t), \\ y(0) &= 0, \\ \dot{y}(0) &= 0, \end{aligned}$$

for $c/\omega_0 = 0.2$ (de blå kurvene på figur 1) og $\omega_0 = 1$ (egensvingeperioden er altså 2π). Øverst er $\omega = \omega_0/2$, og responsen følger etterhvert eksitasjonen sånn noenlunde. Deretter er $\omega = \omega_0$ og vi har *resonans*. Her bygger responsen seg opp til en amplitude som er 2.5 ganger større enn eksitasjonen! Dessuten kommer maksimum respons en kvart periode etter maksimum eksitasjon ($\phi = \pi/2$). Nederst er $\omega = 2\omega_0$ og nå greier ikke massen helt å følge med. Eksitasjon og respons svinger nesten i motfase ($\phi \approx \pi$). Stemmer alt dette med figur 1?

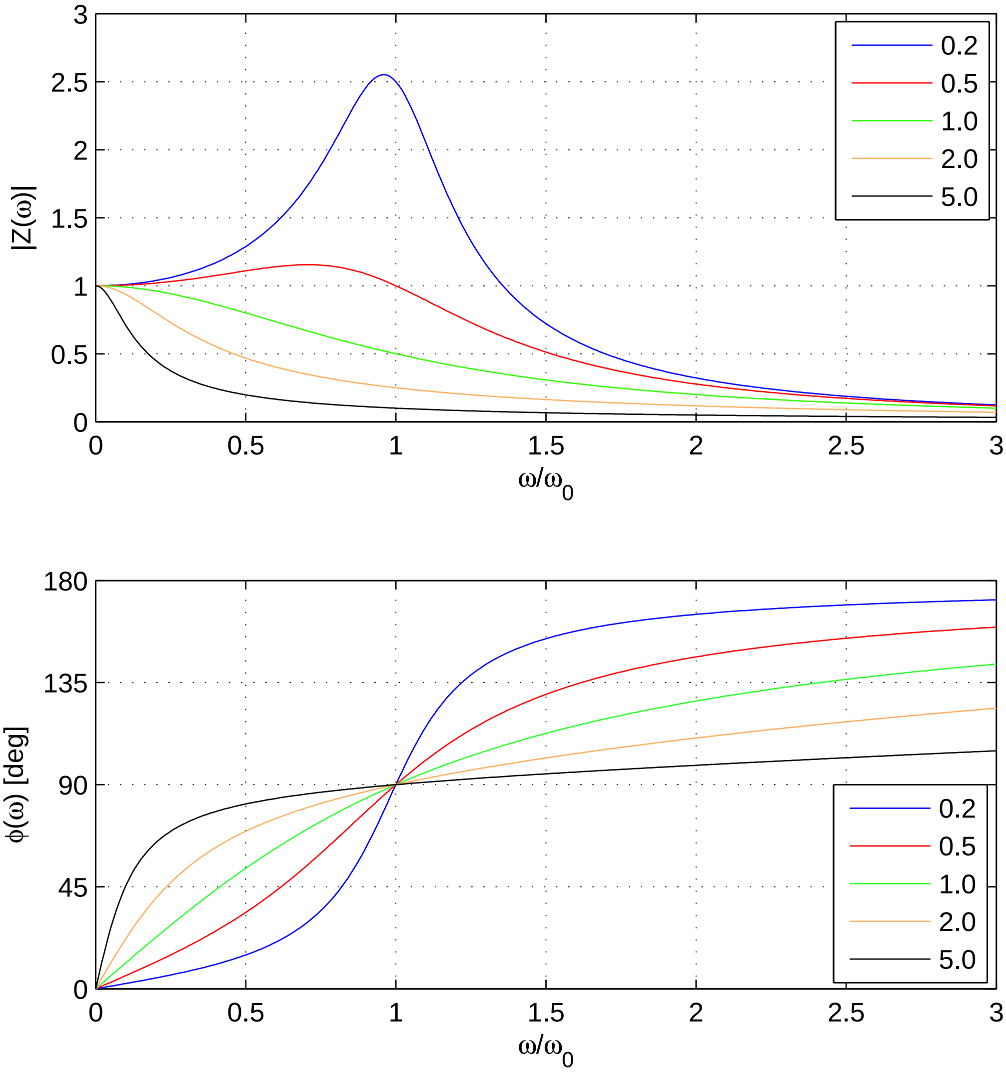

Figure 1: Forsterkningsfaktor $|Z|$ og faseforskyvning ϕ for noen verdier av c/ω_0. Her svarer $c/\omega_0 < 1$ til *underkritisk* , $c/\omega_0 = 1$ svarer til *kritisk*, og $c/\omega_0 > 1$ svarer til *overkritisk* dempning

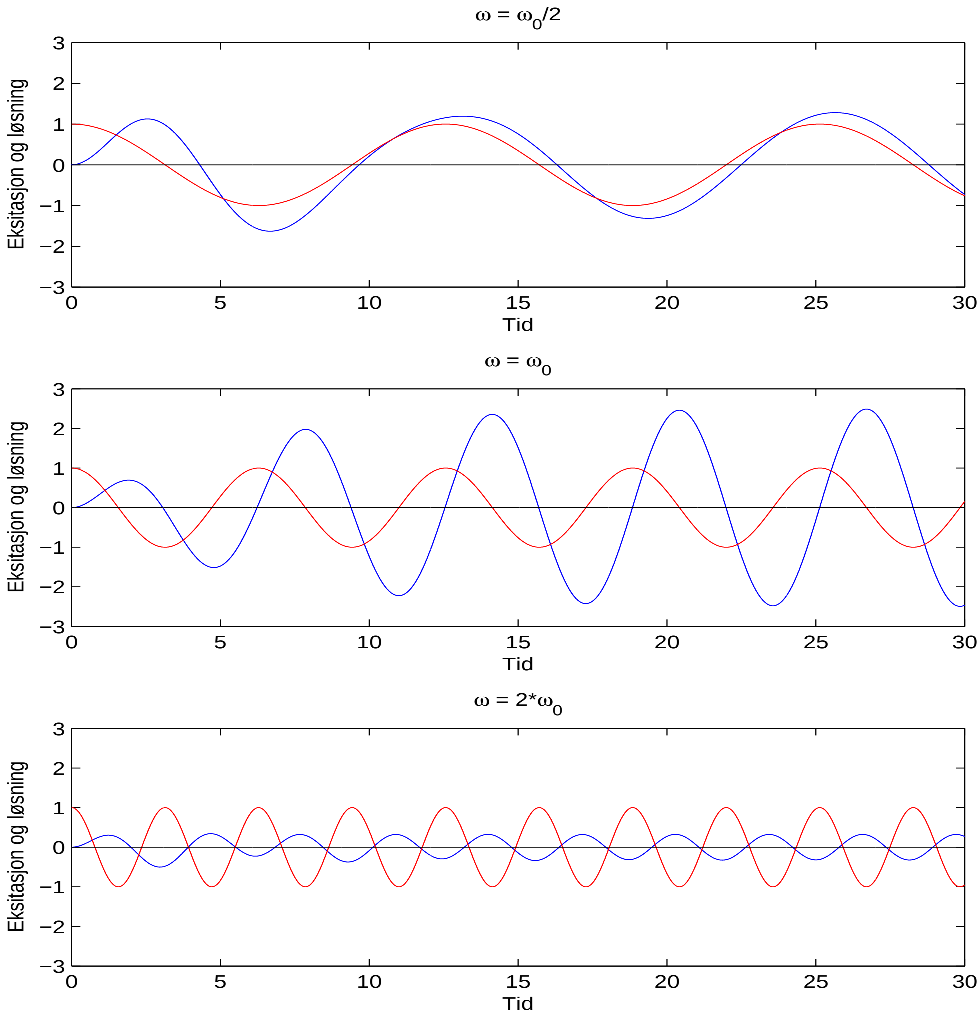

Figure 2: Eksitasjon (rød) og løsning (blå) for $c = 0.2$ og $\omega_0 = 1$, for $\omega = \omega_0/2$, ω_0 og 2ω.

Løsningene er regnet ut numerisk vha. Matlab. De analytiske uttrykkene blir litt grisete, men ikke vanskelig å regne ut.

Hvis $c = 0$ og $\omega = \omega_0$, vil problemet

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = a \cos(\omega_0 t) \tag{12}$$

ha partikulærløsningen

$$y_P(t) = \frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) . \tag{13}$$

(sjekk!). Her vil derfor amplituden vokse lineært med tiden. Slik går også løsningen for $\omega = \omega_0$ på figur 2 i starten, men der stabiliserer amplituden seg på verdien

$$\frac{1}{R(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (2c\omega_0)^2}} = \frac{1}{2c\omega_0},$$

Den komplekse regnemåten har sin store fordel når vi ser på mer kompliserte ligninger. Men det er ikke så enkelt å huske formlene i lign. 8, mens utledningen av partikulærløsningen til lign. 5 kan skrives opp umiddelbart, og mye mer direkte enn å plundre med cos og sin.