Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# TMA4110 – Matematikk 3

Eksamen 1. desember 2005

**Løsningsforslag**

$\boxed{1}$ Vi setter inn $z = x + iy$, og får

$$|x + i(y-2)| = |x + i(y-3)|.$$

Ved å regne ut modulene får vi videre

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 6y + 9.$$

Altså, $2y = 5$, og dermed $\underline{y = 5/2}$.

Alternativt kan en tilnærme seg problemet geometrisk, og legge merke til at de $z$ vi er ute etter er de som i det komplekse plan har samme avstand til $2i$ som til $3i$. Dette gir direkte svaret $\underline{y = 5/2}$.

$\boxed{2}$ **a)** Differensialligningen er allerede på standardform:

$$y' + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}.$$

Integrerende faktor $\rho(x)$ blir

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{3x}{x^2+1}dx\right) = e^{\frac{3}{2}\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Ligningen reduseres til

$$(\rho y)' = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{6x}{x^2+1} = 6x\sqrt{x^2+1}.$$

Vi integrerer begge sider, og får

$$(x^2+1)^{\frac{3}{2}}y = \int 6x\sqrt{x^2+1}dx = \int 3u^{\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{3}{2}} + c = 2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c,$$

slik at $y(x) = 2 + c(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. Innsetting av initialverdi gir sammenhengen $y(0) = 2 + 1^{-\frac{3}{2}}c = 3$, slik at $c = 1$. Løsningen på initialverdiproblemet er altså

$$\underline{y(x) = 2 + (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}}.$$

**b)** Vi finner først homogenløsningen. Karakteristisk ligning er $\lambda^2 - 5\lambda + 6y = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, så

$$y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}.$$

For å finne en partikluærløsning bruker vi ubestemte koeffisienters metode og setter $y_p = A + Bx + C\cos x + D\sin x$. Vi har da

$$\begin{aligned} y_p' &= B + D\cos x - C\sin x, \\ y_p'' &= -C\cos x - D\sin x. \end{aligned}$$

Innsetting og samling av ligningene gir oss

$$\begin{aligned} 1 &: 6A - 5B = 0, \\ x &: 6B = 36, \\ \cos x &: 5C - 5D = 0, \\ \sin x &: 5C + 5C = 10, \end{aligned}$$

med løsning $A = 5$, $B = 6$, $C = 1$ og $D = 1$. Generell løsning av differensialligningen er altså

$$\underline{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 5 + 6x + \cos x + \sin x}.$$

**c)** Dette er en Euler-Cauchy-ligning. Vi setter inn $y = x^m$ og får

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + 8xmx^{m-1} + 12x^m = 0.$$

Altså, $(m^2 + 7m + 12)x^m = 0$. Siden $m^2 + 7m + 12 = (m+3)(m+4)$, blir generell løsning på formen

$$y(x) = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-4}.$$

Vi har videre at $y'(x) = -3c_1 x^{-4} - 4c_2 x^{-5}$. Innsetting av initialverdier gir ligningene

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_2 = 0, \\ y'(1) &= -3c_1 - 4c_2 = 1. \end{aligned}$$

Med løsning $c_1 = 1$ og $c_2 = -1$. Løsningen på initialverdiproblemet er altså

$$\underline{y(x) = x^{-3} - x^{-4}}.$$

$\boxed{3}$ **a)** Ved standard Gauss-Jordan-eliminasjon bringer vi matrisen på redusert Echelonform:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får direkte at løsningen blir

$$\underline{\mathbf{x} = s\begin{bmatrix}-7\\-6\\-4\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.}$$

**b)** Vi kan benytte den reduserte Echelonformen av $A$ funnet i a) til å sette opp basisene for disse rommene direkte.

$$\text{Basis Row}(A) = \underline{\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 7 & 3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 6 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\}.}$$

$$\text{Basis Col}(A) = \underline{\{\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix}0 & -2 & -3 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix}-3 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\}.}$$

Det finnes også andre løsninger. Siden $\text{Row}(A)^{\perp} = \text{Null}(A)$, har vi dessuten

$$\text{Basis Row}(A)^{\perp} = \underline{\{\begin{bmatrix}-7 & -6 & -4 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix}-3 & -2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\}.}$$

**4** Ortogonalitet vises ved å vise at prikkproduktet $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2$ blir null.

Den manglende vektoren vil være en basisvektor for $V^{\perp}$. Vi setter opp en matrise $A$ med $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ som rader, slik at nullrommet til A blir $V^{\perp}$.

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 5 & -1\end{bmatrix}.$$

Vi setter fri variabel $z = 5t$, og får $y = t$ og $x = -4t$. Så

$$\underline{\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}-4\\1\\5\end{bmatrix}.}$$

tilfredstiller kravet.

En enkel måte å finne projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ ned i $V$ på er å finne prosjeksjonen $\mathbf{p}'$ ned i $V^{\perp}$, og sette $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{p}'$.

Vi har at

$$\mathbf{p}' = \left(\frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{x}_3|^2}\right)\mathbf{x}_3 = \frac{1}{42}\left(\begin{bmatrix}-4 & 1 & 5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\3\\-5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-4\\1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-1\\-5\end{bmatrix},$$

Så

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}5\\3\\-5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\-1\\-5\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}}.$$

Alternativt kunne vi ha funnet projeksjonen ned i $V$ direkte ved å bruke $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$.

**5** **a)** Egenverdiene er løsningene av $|A - \lambda I| = 0$. I dette tilfellet får man ved å utvikle determinanten om siste rad:

$$|A - \lambda I| = (5 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 4] = (5 - \lambda)^2(1 - \lambda).$$

Så egenverdiene er $\underline{\lambda_1 = 1}$ og $\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 5}$.
Egenvektor tilhørende $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x_1} = \mathbf{0}.$$

Noe som gir $\underline{\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}$.
Egenvektorer tilhørende $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Noe som gir $\underline{\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}$ og $\underline{\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}$.

**b)** $A$ er diagonaliserbar siden $A$ har tre lineært uavhengige egenvektorer. Matrisa $P$ inneholder disse som kolonner, og $D$ inneholder egenverdiene:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Siden $A$ er en symmetrisk matrise vil egenvektorene være ortogonale. Dersom vi normerer egenvektorene til lengde 1 før vi konstruerer $P$, vil $P$ bli en ortogonal matrise som tilfredstiller $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$.

**c)** Systemet kan skrives som

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

der $A$ er matrisa fra oppgave a). Vi har dermed at generell løsning er

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x_1}e^t + c_2\mathbf{x_2}e^{5t} + c_3\mathbf{x_3}e^{5t}.$$

Koeffisientene finnes ved å løse ligninga $P\mathbf{c} = \mathbf{y}(0)$, noe som gir $c_3 = 3$, $c_2 = 1$ og $c_1 = 1$. Så løsningen av systemet er

$$\underline{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t}.}$$

$\boxed{6}$ Dersom $\mathbf{x}_0$ er startfordelinga mellom ikke utleid og utleid på starten av en uke, vil fordelingen etter $k$ uker være

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}_0 = A^k\mathbf{x}_0.$$

Problemet blir å finne ut hva $A^k$ går mot for store $k$. Dette kan vi gjøre på to måter.

For det første er matrisa $A$ stokastisk, og derfor vet vi at $A^k$ vil konvergere mot $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}$, der $\mathbf{v}_1$ er den normerte egenvektoren tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$. Denne er gitt som løsning av

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.4 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Altså, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4/11 & 7/11 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Alternativt kan vi først finne egenverdiene og egenvektorene til $A$. Disse blir $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1/10$, $\mathbf{v}_1$ som før, og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Ved hjelp av diagonaliseringen får vi at

$$A^k = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/11 & 1/11 \\ -7/11 & 4/11 \end{bmatrix}.$$

Ved begge fremgangsmåter finner en at

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Så, uavhengig av startfordelingen vil andelen av bilene til "Lei-et-Vrak" som er utleid i starten av en uke gå mot $\underline{\frac{7}{11}}$.

$\boxed{7}$ Første del: Siden 0 er en egenverdi for $AB$ får vi at $|AB - 0I| = |AB| = 0$. Derfor har vi at

$$|BA - 0I| = |BA| = |B| \cdot |A| = |A| \cdot |B| = |AB| = 0.$$

Andre del: Denne kan løses på to forskjellige måter.

Alt. 1. Anta at $\lambda$ er en egenverdi for $AB$. I og med at $B$ er invertibel er $B^{-1}$ veldefinert og $|B^{-1}| \neq 0$. Vi har

$$|AB - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |AB - \lambda I||B^{-1}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |ABB^{-1} - \lambda B^{-1}| = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$|A - \lambda B^{-1}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |B^{-1}BA - \lambda B^{-1}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |B^{-1}||BA - \lambda I| = 0$$

Altså er $\lambda$ også en egenverdi for $BA$.

Alt. 2. La $\lambda$ være en egenverdi for $AB$ og $\mathbf{x}$ være tilhørende egenvektor, slik at $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vi å multiplisere med $B$ fra venstre på begge sider får vi

$$BAB\mathbf{x} = B\lambda\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}.$$

Med $\mathbf{z} = B\mathbf{x}$ har vi at $BA\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$. Derfor er $\lambda$ en egenverdi for $BA$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{z}$, forutsatt at $\mathbf{z}$ ikke er nullvektor. Dette er imidlertid umulig, fordi $B$ er inverterbar, så $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

*Kommentar*: Resultatet at $\lambda$ er en egenverdi for $AB$ hvis og bare hvis $\lambda$ er en egenverdi for $BA$ er sant helt generelt for to $n \times n$-matriser. Prøv gjerne å vise andre del av oppgaven uten å forutsette at $B$ er inverterbar!