Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 995 59 273

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Torsdag 10. august 2006
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september

Med unntak av flervalgsoppgaven (oppgave 5) skal alle svar begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Bestem alle komplekse tall $z = x + iy$ som oppfyller ligningen

$$z^2 = i|z|^2.$$

Oppgave 2

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y' + \frac{1}{x}y = \cos(x^2), \quad x > 0.$$

b) Finn generell løsning av ligningen

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Finn $y(x)$ som løser

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} - 12x - 10.$$

c) De reelle tallene a og b er slik at ligningen

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0, \qquad x > 0$$

har basis av løsninger $y_1 = x$ og $y_2 = x^2$. Finn generell løsning av den ikke-homogene ligningen

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 2, \quad x > 0.$$

Oppgave 3 Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2ax + ay + \quad\ 3z &= 4a \\ x \qquad + (a-1)z &= a \\ x + y - \qquad z &= 1. \end{aligned}$$

a) Bestem, for hver verdi av parameteren a, antall løsninger av ligningssystemet.

b) Løs ligningssystemet når $a = 3$.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Benytt dette til å beregne matrisen A^{2006}.

c) Løs følgende system av differensialligninger:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -6y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

når $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = -3$.

Oppgave 5 *Flervalgsoppgave.*
Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.

a) La $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være kolonnevektorer i $\mathbb{R}^3$, der ingen av dem er nullvektor. Definer matrisen $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$. Hva er dimensjonen til nullrommet til A?

A: 0 **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3

b) Gitt en 5×4-matrise A slik at $\mathrm{Row}(A)$ har basis $\mathbf{v_1} = (1, 7, -2, 3)$ og $\mathbf{v_2} = (0, 1, 4, -3)$. Hvilket av alternativene under er en basis for $\mathrm{Null}(A)$?

A: $\left\{ \begin{bmatrix} 30 \\ -3 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

B: $\left\{ \begin{bmatrix} -30 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

C: $\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} \right\}$

D: $\left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Oppgave 6 Gitt initialverdiproblemet

$$y' + \sin(x + y) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Tilnærm $y(\pi)$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \pi/2$.