Lineær uavhengighet (16/10)

EP4.2

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ i et vektorrom V er lineært uavhengige hvis vektorligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

bare har én løsning $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$-matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \; \cdots \; \mathbf{v}_n]$$

med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ har determinant ulik null, $\det A \neq 0$.

(EP4.2 Teorem 2)

$k>n$: k vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$

er lineært avhengige hvis $k>n$

3 eller flere vektorer i $\mathbb{R}^2$ er lin. avh.

4 eller flere vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lin. avh.

osv.

$k<n$: For å avgjøre om k vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige når $k<n$ kan vi

enten: Løse vektorligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ lin. uavh. $\Leftrightarrow$ eneste løsn. er $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$

Eller (EP4.2 Teorem 3):

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times k$-matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k]$ har en $k \times k$-undermatrise med determinant $\neq 0$.

Eksempel for Teorem 3:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ alle 3×3 undermatriser har determinant lik 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Følgelig er vektorene $v_1 = (1,0,3,0)$, $v_2 = (0,2,0,4)$, $v_3 = (1,2,3,4)$ lineært avhengige (som vi også ser direkte: $v_3 = v_1 + v_2$).

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ her er $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Følgelig er $v_1 = (1,0,3,0)$, $v_2 = (0,2,0,4)$, $v_3 = (0,2,3,4)$ lin. uavh.