Differensialligninger (K kap 2)

(1) HOMOGEN

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(2) INHOMOGEN

$$= r(x)$$

p, q, r kontinuerlige på I

Eksistens og entydighet:

(1) med initialbetingelse

$y(x_0) = k_0,\ y'(x_0) = k_1 \quad (x_0 \in I)$

har entydig løsning $y(x)$ på I

Tilsvarende for (2)

Generell løsning:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$y_1(x), y_2(x)$ basis av løsninger

$$y = y_h + y_p$$

y_p: én partikulær løsning

Metoder:

1) $y'' + ay' + by = 0$ a og b konstanter

Karakteristisk ligning $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

tabell (K2.3) / nettsidenotat

2) $x^2 y'' + axy' + by = 0$

Euler-Cauchy $y = x^m$

Hjelpeligning $m^2 + (a-1)m + b = 0$

3) Gitt én løsning $y_1(x)$,

finn $y_2 = u(x)y_1$

(reduksjon av orden)

Finne y_p:

$r(x)$ i tabell (K2.7) / nettsidenotat

ubestemte koeff. metode

(NB: modifikasjonsregel)

ellers: variasjon av parametre

Variasjon av parametre

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

ligningssystem for u', v'

eller formel i K2.10

Svingninger (K2.4, 2.8)

A Frie svingninger $my'' + cy' + ky = 0$

(i) uten demping $my'' + ky = 0$

$c = 0$

$y_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (harmonisk svingning)

(ii) med demping

$c > 0$

I overdempning (reelle $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

II kritisk dempning (reell $\lambda_1 = \lambda_2$)

III underdempning (komplekse λ)

B Tvunge svingninger $my'' + cy' + ky = F_0 \cos\omega t$

periodisk ytre kraft

(i) uten demping, $c = 0$

y_h som i A(i)

$\omega \neq \pm\omega_0$: $y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$y = y_h + y_p$ (to harmoniske svingninger)

$\omega = \pm\omega_0$: resonans, må modifisere y_p

$y_p = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$

$\to \infty$ når $t \to \infty$

(ii) med demping, $c > 0$

y_h som i A(ii)

$y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (stasjonær løsning)

(steady state)

$y_h \to 0$ når $t \to \infty$