Differensialligninger (KAP2)

1) HOMOGEN
\[ y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \]
\[ p, q, r \text{ kontinuerlige på } I \]

Eksistens og entydighet:
1) med initialbetingelse
\[ y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, (x_0 \in I) \]
har en entydig løsning \( y(x) \) på \( I \)

Generell løsning:
\[ y_n = c_1 y_1 + c_2 y_2 \]
\( y_1(x), y_2(x) \) basis av løsninger

Metoder:
1) \[ y'' + a y' + b y = 0 \]
   \[ \alpha \text{ og } b \text{ konstanter} \]
   Karakteristikk ligning \( \lambda^2 + a \lambda + b = 0 \)
   tabell (K2.3) / nettsidenotat

2) \[ x^2 y'' + a x y' + b y = 0 \]
   Euler-Cauchy \( y = x^m \)
   Hjelpelinje \( m^2 + (a - 1)m + b = 0 \)

3) Gitt en løsning \( y_1(x) \),
   finn \( y_2 = u(x)y_1 \)
   (reduksjon av orden)

2) INHOMOGEN
\[ y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \]

Tilsvarende for (2)

\[ y = y_n + y_p \]
én partikulær løsning

Finne \( y_p \):
1) \( r(x) \) i tabell (K2.7) / nettsidenotat
   ubestemte koeff. metode
   (NB: modifikasjonstregel)
ellers: variasjon av parameter

Variasjon av parameter
\[ y_p = u(x) y_1 + v(x) y_2 \]

linjeringssystem for \( u', v' \)
ellert formel i K2.10
Swingninger (K2.4, 2.8)

A  Frie swingninger
   (i) uten demping
      \[ y_h'' + cy' + ky = 0 \]
      \[ y_h'' + ky = 0 \]
      \[ y_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t - \phi) \]
      \[ \omega_0 = \sqrt{k/m} \] (harmonisk swingning)

   (ii) med demping
      \[ c > 0 \]
      I overdemping (reelle \( \lambda_1 \neq \lambda_2 \))
      II kritisk demping (reelle \( \lambda_1 = \lambda_2 \))
      III underdemping (komplekse \( \lambda \))

B  Tvunge swingninger
   \[ y'' + cy' + ky = f_0 \cos \omega t \] periodisk ytre kraft

   (i) uten demping, \( c = 0 \)
      \[ \omega \neq \pm \omega_0 : \quad y_p = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \]
      \[ y = y_h + y_p \] (to harmoniske swingninger)
      \[ y = \pm \omega_0 : \quad y_p = t (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \]
      \[ \lim_{t \to \infty} y_p \to \infty \text{ når } t \to \infty \]

   (ii) med demping, \( c > 0 \)
      \[ y_p = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \] (stasjonær løsning)
      \[ y_h \to 0 \text{ når } t \to \infty \] (steady state)