Lineære ligningssystem og matriser (EP kap 1)

m ligninger, n ukjente (variabler): $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

der

$$A = [a_{ij}] \qquad \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times n$-matrise

Gausseliminasjon:

Omformer totalmatrisen $[A \,\vdots\, \mathbb{b}]$ til echelonmatrise

ved elementære radoperasjoner $\left((c)R_p, \ \mathrm{SWAP}(R_p, R_q), \ (c)R_p + R_q \right)$

$(\cdot c \qquad \leftrightarrows \qquad \overset{c}{\hookleftarrow})$

Gauss-Jordaneliminasjon:

Gaussel. + omforme echelonmatrisen til redusert echelonmatrise

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er konsistent (har løsning)

hvis echelonmatrisen ikke har rad $[0 \ldots 0 \,\vdots\, d]$ med $d \neq 0$

Løsningen er entydig (unik) hvis alle ukjente er ledervariabler

Uendelig mange løsninger hvis minst en ukjent er fri variabel

Ligningssystemet på echelonform løses ved tilbakesubstitusjon

Matrisemultiplikasjon

$\underset{m \times p}{A} \quad \underset{p \times n}{B}$ (med $p = p$)

$\underset{m\times n}{AB} = [c_{ij}]$ der $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

$\left(c_{ij} = (i\text{-te rad i } A) \cdot (j\text{-te kol. i } B) \right)$

AB kan være ulik BA (ikke kommutativt)

Invers ($n \times n$-) matrise

A er inverterbar hvis det fins B slik at $AB = BA = I$

B er invers til A, $A^{-1} = B$ (nok med $AB = I$)

Merk: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$

Finne A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Generelt:

$$\left[A \;\vdots\; I \right] \xrightarrow[\text{eliminasjon}]{\text{Gauss-Jordan}} \left[I \;\vdots\; A^{-1} \right]$$

$\left(AB = I \Leftrightarrow A\mathbb{b}_1 = \mathbb{e}_1, \dots, A\mathbb{b}_n = \mathbb{e}_n \text{, løses parallelt} \right)$

Teorem: Følgende er ekvivalent for $n \times n$-matrise A

(1) A er inverterbar

(2) A er radekvivalent med I (redusert echelonmatrise for A er I)

(3) Det homogene systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har bare løsningen $\mathbb{x} = \mathbb{0}$.

(4) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har entydig løsning for enhver n-vektor $\mathbb{b}$ $(\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b})$

(5) $\det A \neq 0$ (EP 2.3)