Radrom, kolonnerom, nullrom

A $m \times n$-matrise, $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

<u>Radrommet til A</u> = Row(A) = underrom i $\mathbb{R}^n$
som er utspent av radene i A

<u>Kolonnerommet til A</u> = Col(A) = underrom i $\mathbb{R}^m$
som er utspent av kolonnene i A

<u>Nullrommet til A</u> = Null(A) = alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
løsningsrommet til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}$ ortogonal til alle rader i A

dvs. $\quad \mathrm{Row}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(A)$

<u>Dimensjoner:</u>

$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)$$

$$\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Null}(A) = n$$

Finne basiser

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} E$ (echelon-matrise) evt. GaussJordan til redusert echelonmatrise

Basis for Row(A): Ikkenullradene i E

Basis for Col(A): Kolonnene i A som tilsvarer pivotkolonnene i E

Basis for Null(A): $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow E\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Med k frie variabler får generell løsning formen $\mathbf{x} = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \mathbf{v}_k$. Da er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ basis for Null(A)

Anvendelse: Finn basis for $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ og $V^\perp$

La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ være rader (evt. kolonner) i en matrise A og finn basis for Row(A) (evt. Col(A)), for V er da lik Row(A) (henholdsvis Col(A)).

Med $V = \text{Row}(A)$ er basis for Null(A) = basis for $V^\perp$

(med $V = \text{Col}(A)$ er basis for $\text{Null}(A^T)$ = basis for $V^\perp$)

$$\dim V + \dim V^\perp = n$$

Inhomogene ligningssystem

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er konsistent hvis og bare hvis $\mathbb{b}$ er i $Col(A)$

Da er generell løsning på formen $\mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + \mathbb{x}_h$

der $\mathbb{x}_0$ er én løsning av $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ og $\mathbb{x}_h = t_1\mathbb{v}_1 + \cdots + t_k\mathbb{v}_k$

er generell løsning av det homogene systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$

Minste kvadraters løsning av inkonsistent system $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

er en løsning $\bar{\mathbb{x}}$ av normalsystemet $A^T A \bar{\mathbb{x}} = A^T \mathbb{b}$

Da er $\mathbb{p} = A\bar{\mathbb{x}}$ den ortogonale proj. av $\mathbb{b}$ inn i $Col(A)$

Kvadratiske matriser

For $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent:

(1) A er inverterbar

(2) A er radekvivalent med identitetsmatrisen I

(3) $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har bare triviell løsning $\mathbb{x} = \mathbb{0}$

(4) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har entydig løsning $(\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b})$ for alle $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^n$

(5) $\det A \neq 0$

(6) kolonnene i A er lineært uavhengige

(7) $\operatorname{rang}(A) = n$

(8) 0 er ikke egenverdi for A

Gram-Schmidts algoritme

gir ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ for underrom V i $\mathbb{R}^m$ med basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$$

osv.

Projeksjonsformelen

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k$$

for å finne den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av en vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ inn i et underrom V i $\mathbb{R}^m$ med ortogonal basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad \text{der } \mathbf{p} \in V \text{ og } \mathbf{q} \in V^{\perp}$$

Egenverdier/egenvektorer

$\mathbb{v} \neq \mathbb{0}$, $A\mathbb{v} = \lambda \mathbb{v}$

En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar $\iff$ A har n lin. uavh. egenvektorer

Da finner vi matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonalmatrise:

① Finn alle egenverdier λ ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$

② For hver egenverdi λ_i, finn basis for tilhørende egenrom ved å løse systemet $(A - \lambda_i I)\mathbb{v} = \mathbb{0}$

③ Med n lin. uavh. egenvektorer $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ og egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ setter vi

$$P = [\mathbb{v}_1 \dots \mathbb{v}_n] \text{ og } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad \text{Da er } \boxed{P^{-1}AP = D}$$

A er ortogonalt diagonaliserbar $\iff$ A er symmetrisk $(A^T = A)$

Da finner vi ortogonal matrise P ($P^TP = I$ dvs. $P^{-1} = P^T$, kolonnene i P er ortogonale enhetsvektorer) som diagonaliserer A:

① Finn alle egenverdiene og en ortogonal basis for hvert egenrom. (Bruk f.eks. Gram-Schmidt hvis dim ≥ 2)

② Normaliser egenvektorene ved å dele på lengden, og bruk n ortogonale egenvektorer med lengde 1 som kolonner i P

Da er $P^{-1} = P^T$ og $P^{-1}AP = D$ slik at $\boxed{P^TAP = D}$

Anvendelser av egenverdier/egenvektorer

① Potenser av matriser ($A^k = ?$)

Hvis A er diagonaliserbar, $P^{-1}AP = D$, så er

$A = PDP^{-1}$ og $\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$

② System av diff. ligninger

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad \text{der } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}$$

Hvis A har n lin. uavh. egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ så er generell løsning

$$\boxed{\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n}$$

③ Kjeglesnitt og dreining av koordinatsystemet

A symmetrisk 2x2-matrise, P ortogonal og $P^TAP = D$

Koordinatskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ omformer

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} + B\mathbf{x} + f = 0 \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad B = [d \; e] \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

til

$$\mathbf{x}'^TD\mathbf{x}' + BP\mathbf{x}' + f = 0 \quad (\text{uten produktledd } x'y')$$

$\det P = \pm 1$, hvis $\det P = 1$ så er $x'y'$-koordinatsystemet en rotasjon av xy-systemet