TMA4115 MATEMATIKK 3

Semesterprøve mandag 14. mars 2005

Løsningsforslag

Oppgave 1 Bestem realdelen til det komplekse tallet $(1-i)^2/(1+i)$.

A: 1 **B:** 0 $\boxed{\textbf{C:}\ -1}$ **D:** -2

Vi skriver $(1-i)^2/(1+i)$ på formen $x+iy$ for å finne realdelen x:

$$\frac{(1-i)^2}{(1+i)} = \frac{-2i}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{-2i-2}{2} = -1-i.$$

Følgelig er $x=-1$, og svaret er **C**.

Oppgave 2 Avgjør om det fins et positivt heltall n slik at $(\sqrt{3}+i)^n$ er et reelt tall, og bestem i så fall det minste slike tallet n.

A: Ingen n **B:** $n=3$ $\boxed{\textbf{C:}\ n=6}$ **D:** $n=12$

Vi bestemmer først argumentet θ for $z=\sqrt{3}+i$. Siden z er i første kvadrant og $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, er $\theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$. Hvis z^n skal være et reelt tall, må $n\theta$ være et heltallig multiplum av π. Vi ser at det minste positive heltallet n som oppfyller dette er $n=6$. Svaret er altså **C**. Da er

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2\,e^{i\pi/6}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi} = 64\cdot(-1) = -64.$$

Oppgave 3 Hva blir $y(1)$ for løsningen $y(x)$ av initialverdiproblemet

$$y' + y = e^x, \qquad y(0) = 1\,?$$

$\boxed{\textbf{A:}\ \cosh 1}$ **B:** $\sinh 1$ **C:** e **D:** 0

Ligningen er lineær, og en integrerende faktor er $F(x) = e^{\int dx} = e^x$. Ved å multiplisere ligningen med $F(x)$ kan den skrives $(e^x y)' = e^{2x}$, og ved integrasjon får vi $e^x y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. Initialbetingelsen $y(0)=1$ gir $C=\frac{1}{2}$, og løsningen av initialverdiproblemet blir $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$. Da er $y(1) = \cosh 1$, og svaret er **A**.

Oppgave 4 La $y(x)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$y' + y^2 = x^2, \quad y(0) = 1.$$

Bruk Eulers metode med skrittlengde $h=0.1$ til å finne en tilnærmet verdi for $y(0.2)$.

A: 0.76 **B:** 1.222 **C:** 1.001 $\boxed{\textbf{D:}\ 0.82}$

Her er $y' = x^2 - y^2$. Ifølge Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ er $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}$ der

$$x_{n+1} = x_n + 0.1, \quad y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n^2 - y_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fra initialbetingelsen får vi $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Da blir $x_1 = 0.1$, $y_1 = 0.9$ og $x_2 = 0.2$, $y_2 = 0.82$. Følgelig er $y(0.2) \approx 0.82$, og svaret er **D**.

Oppgave 5 Hvilket av de fire funksjonsparene skiller seg fra de tre andre når det gjelder lineær avhengighet/uavhengighet?

A: $x+1,\ x+2$ $\boxed{\textbf{B:}\ e^{x+1},\ e^{x+2}}$ **C:** $\sin x,\ \sin 2x$ **D:** $\ln x,\ \ln 2x$

Siden $e^{x+2}/e^{x+1} = e^x e^2/e^x e = e$ er konstant, er funksjonene i **B** lineært avhengige (proporsjonale). De tre andre funksjonsparene er lineært uavhengige siden $(x+2)/(x+1)$, $\sin 2x/\sin x$ og $\ln 2x/\ln x$ varierer med x. Dermed er svaret **B**.

Oppgave 6 Hvilket av punktene ligger på grafen til løsningen av initialverdiproblemet

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0\,?$$

A: $(2, 1)$ **B:** $(2, 3/2)$ $\boxed{\textbf{C:}\ (2, 5/2)}$ **D:** $(2, 3)$

Vi må løse initialverdiproblemet. Ligningen er en Euler-Cauchy-ligning, og $y = x^m$ er løsning hvis $m^2 - 1 = 0$, $m = \pm 1$. Dermed er $y = C_1x + C_2x^{-1}$. Initialbetingelsene gir $C_1 = C_2 = 1$ og følgelig $y = x + 1/x$. For $x = 2$ er $y = 5/2$, og svaret er altså **C**

Oppgave 7 Hvilken av funksjonenene vil gi en partikulær løsning av differensialligningen

$$y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^{2x}\,?$$

A: $(Ax^2 + B)e^{2x}$ **B:** $(Ax^3 + Bx)e^{2x}$ **C:** $(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$ $\boxed{\textbf{D:}\ (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2x}}$

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ har røttene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$. Formen på en partikulær løsning vil følgelig være $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$ siden koeffisienten $c = 2$ i eksponenten er enkel rot i den karakteristiske ligningen. Svaret er altså **D**. (Generell løsning av differensialligningen er $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x)e^{2x}$.)

Oppgave 8 Et masse/fjær-system uten dempning har bevegelsesligning

$$2y'' + ky = 0.8\cos 0.8t$$

der k er fjærkonstanten. For hvilken verdi av k blir det resonans?

A: 0.16 $\boxed{\textbf{B:}\ 1.28}$ **C:** 0.8 **D:** 0.64

Vi får resonans når $\omega = \omega_0$, der $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ er vinkelfrekvensen til det frie systemet og $\omega = 0.8$ er vinkelfrekvensen i den ytre kraften. Her er $m = 2$ så betingelsen for resonans blir $\sqrt{k/2} = 0.8$. Det gir $k = 1.28$ og svaret **B**.

Oppgave 9 For hvilken verdi av a har ligningssystemet uendelig mange løsninger?

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ x - z &= a \end{aligned}$$

A: Ingen a **B:** $a = 0$ **C:** $a = -2$ $\boxed{\textbf{D:}\quad a = 4}$

Vi omformer ligningssystemets totalmatrise til en echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}.$$

Av den siste matrisen ser vi at ligningssystemet er konsistent dersom $a = 4$. Da blir det uendelig mange løsninger siden vi får en fri variabel. Svaret er altså **D**.

Oppgave 10 Finn den inverse matrisen for 2×2-matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A:}\quad \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ **D:** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

Ved å bruke formelen $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ for å invertere 2×2-matrisen $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ der $ad-bc \neq 0$ får vi

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Svaret er følgelig **A**.