Basis og dimensjon for vektorrom

En endelig mengde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ med vektorer i et vektorrom V er en basis for V hvis

(1) vektorene i S er lineært uavhengige, og
(2) vektorene i S utspenner V, span$(S) = V$.

Da kan enhver vektor $\mathbf{w}$ i V skrives *entydig* på formen $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.

Teorem
La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en basis for et vektorrom V. Da er enhver mengde med flere enn n vektorer i V lineært avhengig.

Teorem
To basiser for et vektorrom V har like mange vektorer. Antallet vektorer i en basis for V er dimensjonen til vektorrommet V.

Teorem
La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

(1) Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.
(2) Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n vektorer som utspenner V, span$(S) = V$, så er S en basis for V.