Radrommet, kolonnerommet og nullrommet til en matrise

La A være en $m \times n$-matrise. Ved Gausseliminasjon kan vi omforme A til en echelonmatrise E (evt. Gauss-Jordan til redusert echelonmatrise).

Radrommet til A

Row(A) er underrommet i $\mathbb{R}^n$ utspent av radvektorene til A. Ikkenullradene i E er en basis for Row(A).

Kolonnerommet til A

Col(A) er underrommet i $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Kolonnene i A som svarer til pivotkolonnene i E er en basis for Col(A).

Nullrommet til A

Null(A) er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som er ekvivalent med $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvis systemet har k frie variabler, blir generell løsning på formen $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$. Da er $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en basis for Null(A).

Dimensjoner

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A) \quad (\text{rangen til } A)$$
$$\text{rang}(A) + \dim \text{Null}(A) = n \quad (A \text{ er } m \times n)$$

Anvendelser

Finne basis

Skal vi finne basis for et underrom $W = \text{span}(S)$ i $\mathbb{R}^n$, kan vi la vektorene i S være radene i en matrise A og finne basis for Row(A). Det gir en basis for W siden $W = \text{Row}(A)$.

Alternativt kan vi la vektorene i S være kolonnene i en matrise A og finne basis for Col(A). Ved å bruke basisalgoritmen for Col(A), blir denne basisen for $W = \text{Col}(A)$ en delmengde i S.

Inhomogene system

$$(*) \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er konsistent hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i Col(A). Hvis $\mathbf{x}_0$ er én løsning av $(*)$, og $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ er en basis for Null(A), så er alle løsningene til $(*)$ på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_k\mathbf{x}_k.$$