Ortogonale vektorer og ortogonale komplementer i $\mathbb{R}^n$

Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale hvis $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

For ortogonale vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ gjelder

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \quad \text{(Pytagoras).}$$

Teorem
Hvis ikkenull-vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er innbyrdes ortogonale, så er de lineært uavhengige.

En vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonal til et underrom V i $\mathbb{R}^n$ hvis $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V. Mengden av *alle* vektorer i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonale til underrommet V kalles det ortogonale komplementet til V og betegnes $V^\perp$ (leses "V perp").

Merk
(1) $V^\perp$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$.
(2) V og $V^\perp$ har bare nullvektoren felles.
(3) $(V^\perp)^\perp = V$
(4) $\dim V + \dim V^\perp = n$

Teorem
La A være en $m\times n$-matrise. Radrommet Row(A) og nullrommet Null(A) er ortogonale komplementer i $\mathbb{R}^n$. Det vil si,

$$\text{hvis } V = \text{Row}(A), \text{ så er } V^\perp = \text{Null}(A).$$