Ortogonale projeksjoner og minste kvadraters løsning

La V være et underrom i $\mathbb{R}^n$. Da kan enhver vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$ dekomponeres entydig på formen $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ der $\mathbf{p}$ er i V og $\mathbf{q}$ er i $V^\perp$. Vektoren $\mathbf{p}$ kalles den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V.

Anta at det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning. Da er $\mathbf{b}$ ikke i Col(A). La $\mathbf{p}$ være den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i Col(A).

Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er vektoren $\bar{\mathbf{x}}$ som gjør kvadratfeilen $E^2 = |A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|^2$ minst mulig. Da er $A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$.

For å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, løser vi det tilhørende normalsystemet

$$\boxed{A^T A\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.}$$

Hvis $m \times n$-matrisen A har rang$(A) = n$, så er $n \times n$-matrisen A^TA inverterbar slik at normalsystemet har entydig løsning. Løsningen $\bar{\mathbf{x}}$ er minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.