Ortogonale basiser og Gram–Schmidts algoritme

En ortogonal basis for et underrom V i $\mathbb{R}^n$ er en basis som består av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ som er parvis ortogonale, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

Hvis, i tillegg, vektorene er enhetsvektorer, dvs. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, k$, sies basisen å være en ortonormal basis for V.

Projeksjonsformelen

Anta at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ danner en ortogonal basis for et underrom V i $\mathbb{R}^n$. Den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ inn i V er gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k.$$

Gram–Schmidts algoritme

Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er en basis for et underrom V i $\mathbb{R}^n$. En ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ for V får vi ved å bruke følgende algoritme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{u}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1}}\mathbf{u}_{k-1}
\end{aligned}$$