Egenverdier og egenvektorer

La A være en $n \times n$-matrise.

En vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ er en egenvektor for A hvis $A\mathbf{v}$ er et skalart multiplum av $\mathbf{v}$,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{for et reelt tall } \lambda.$$

Skalaren λ er en egenverdi for A, og vektoren $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor.

Teorem

Et reelt tall λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ligningen $\det(A-\lambda I) = 0$ er en n-tegradsligning i λ, kalt den karakteristiske ligningen til A.

Å finne egenverdier og egenvektorer:

(1) Finn egenverdiene til A ved å løse den karakteristiske ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$.

(2) Finn, for *hver* egenverdi λ, de tilhørende egenvektorene ved å løse systemet $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Løsningsmengden til systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ er *egenrommet* til A assosiert med egenverdien λ. Det består av nullvektoren og alle egenvektorene som tilhører egenverdien λ.