Diagonalisering av matriser

To $n \times n$-matriser A og B er similære hvis det fins en inverterbar matrise P slik at $B = P^{-1}AP$.

En $n \times n$-matrise A sies å være diagonaliserbar hvis den er similær med en diagonalmatrise D.

Teorem

En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, så er kolonnene til P lineært uavhengige egenvektorer for A, og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen. P er egenvektormatrise, og D er egenverdimatrise for A.

Teorem

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er k egenvektorer for A, og de tilhører *distinkte* egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, så er de k egenvektorene lineært uavhengige. Følgelig, hvis en $n \times n$-matrise A har n distinkte egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Hvis A er en diagonaliserbar matrise, $A = PDP^{-1}$, så kan vi regne ut potenser A^k av A ved å bruke formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$