System av differensialligninger

Et første ordens lineært homogent system med konstante koeffisienter og n ukjente funksjoner $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ har formen

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

På matriseform kan systemet skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ der $A = [a_{ij}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathbf{y}' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$.

Teorem

Hvis $n \times n$-matrisen A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_n$ med egenverdiene λ_1, λ_2, . . . , λ_n, så har $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ generell løsning

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

En n-te ordens lineær homogen differensialligning

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

kan omformes til et første ordens system ved å innføre $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, . . . , $y_n = y^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} y_1' &= \qquad\qquad y_2 \\ y_2' &= \qquad\qquad\qquad\qquad y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 - \cdots - a_{n-1}y_n. \end{aligned}$$