Symmetriske og ortogonale matriser

En kvadratisk matrise $A = [a_{ij}]$ er symmetrisk hvis $A^T = A$, det vil si at $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j.

Teorem
Egenvektorer som tilhører *distinkte* egenverdier for en symmetrisk matrise er ortogonale.

En kvadratisk matrise P er ortogonal hvis P er inverterbar og $P^{-1} = P^T$, det vil si at $P^TP = I$.

Teorem
P er ortogonal hvis og bare hvis kolonnene til P er innbyrdes ortogonale enhetsvektorer.

En kvadratisk matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis det fins en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$. Da er

$$P^TAP = D \quad \text{og} \quad A = PDP^T.$$

Teorem
En kvadratisk matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis A er symmetrisk.

Hvis $P^{-1} = P^T$ og $P^{-1}AP = D$, så må kolonnene til P være innbyrdes ortogonale enhetsvektorer som er egenvektorer for A, og diagonalelementene til D må være de tilhørende egenverdiene.