TMA4115 MATEMATIKK 3

Semesterprøve mandag 12. mars 2007

Løsningsforslag

Oppgave 1 Hva blir $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{18}$?

A: $1+i\sqrt{3}$ **B:** $1-i\sqrt{3}$ $\boxed{\textbf{C:}\ -1}$ **D:** 1

Vi gjør $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ om til polarform $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = re^{i\theta}$. Finner $r = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$ og $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Da er $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{18} = e^{-3i\pi} = -1$.

Alternativt: $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}-i}{2} = -i$ og $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{18} = (-i)^6 = (-1)^3 = -1$.

Oppgave 2 Hvor mange løsninger har ligningen $z^2 - i\bar{z} = \frac{1}{4}$?

A: ingen **B:** en **C:** to $\boxed{\textbf{D:}\ \text{tre eller flere}}$

Med $z = x+iy$ er $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ og $i\bar{z} = ix + y$. Den gitte ligningen kan skrives som

$$x^2 - y^2 - y + i(2xy - x) = \frac{1}{4}.$$

Da er $x^2 - y^2 - y = \frac{1}{4}$ og $2xy - x = 0$. Fra $2xy - x = 0$ har vi $x = 0$ eller $y = \frac{1}{2}$. Hvis $x = 0$ får vi $y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$ og $y = -\frac{1}{2}$, det gir en løsning $z = \frac{-i}{2}$. Hvis $y = \frac{1}{2}$ da har vi $x^2 = 1$ og $x = \pm 1$, vi får to løsninger til, $z = \pm 1 + \frac{i}{2}$. Til sammen har ligningen tre løsninger.

Oppgave 3 For hvilke k går løsningene på $y'' + 2ky' + y = 0$ mot null når $x \to +\infty$?

A: $|k| \le 1$ **B:** $|k| \ge 1$ $\boxed{\textbf{C:}\ k > 0}$ **D:** $k < 0$

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0$ har røtter $-k \pm \sqrt{k^2-1}$. Hvis $k = \pm 1$ har ligningen én rot $-k$, og generell løsning på differensialligningen er $c_1e^{-kx} + c_2xe^{-kx}$. Den går mot null når $x \to +\infty$ hvis $k = 1$. Hvis $|k| > 1$ har den karakteristiske ligningen to reelle røtter $\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2-1}$ og $\lambda_2 = -k - \sqrt{k^2-1}$. Generell løsning på differensialligningen er $c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$. Både λ_1 og λ_2 er negative når $k > 1$ og positive når $k < -1$. Alle løsningene går mot null når $x \to +\infty$ hvis $k > 1$. Hvis $|k| < 1$ har den karakteristiske ligningen to komplekse røtter og begge har realdelen $-k$. Generell løsning er $c_1e^{-kx}\cos\omega x + c_2e^{-kx}\sin\omega x$, den går mot null når $x \to +\infty$ hvis $k > 0$. Det riktige alternativet er C, løsningene på $y'' + 2ky' + y = 0$ går mot null (når $x \to +\infty$) hvis $k > 0$.

Oppgave 4 Hva er $y(2)$ til løsningen på initialverdiproblemet

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = 0,\ x > 0, \qquad y(1) = 2,\ y'(1) = 0?$$

A: 4 **B:** -8 **C:** 12 $\boxed{\textbf{D:}\ -16}$

Karakteristisk ligning til Euler-Cauchy-ligning er $p^2 + (a-1)p + b = 0$. Den blir i dette tilfellet $p^2 - 6p + 8 = 0$. Løsningene er $p_1 = 4$ og $p_2 = 2$. Generell løsning på differensialligningen er $y(x) = c_1x^4 + c_2x^2$. Vi har da $y(1) = c_1 + c_2$, $y'(x) = 4c_1x^3 + 2c_2x$ og $y'(1) = 4c_1 + 2c_2$. Løsningen som oppfyller initialbetingelsene finner vi fra $c_1 + c_2 = 2$ og $4c_1 + 2c_2 = 0$. Det gir $c_1 = -2$ og $c_2 = 4$, løsningen av initialverdiproblemet blir $y(x) = -2x^4 + 4x^2$. Dermed er $y(2) = -2 \cdot 16 + 4 \cdot 4 = -16$.

Oppgave 5 Differensialligningen $y'' + ay' + 5y = 0$ har en basis av løsninger $\{y_1(x), y_2(x)\}$. Hvilket av alternativene kan bli Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$, hvis $y_1(x) = e^{2x}$?

A: ae^{ax} **B:** e^{4x} $\boxed{\textbf{C:}\ \frac{1}{2}e^{-ax}}$ **D:** e^{5x}

Hvis $y_1(x) = e^{2x}$ er en løsning på $y'' + ay' + 5y = 0$, så har vi $4e^{2x} + 2ae^{2x} + 5e^{2x} = 0$ og $a = -\frac{9}{2}$. Den karakteristiske ligningen er da $\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + 5 = 0$. Den har to røtter $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Vi har basis av løsningene $\{e^{2x}, e^{\frac{5}{2}x}\}$. Da blir Wronskideterminanten lik

$$e^{2x} \cdot \frac{5}{2}e^{\frac{5}{2}x} - 2e^{2x} \cdot e^{\frac{5}{2}x} = \frac{1}{2}e^{\frac{9}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-ax}.$$

Hvis vi begynner med en annen basis av løsninger $\{e^{2x}, c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{5}{2}x}\}$, $c_2 \neq 0$, da blir Wronskideterminanten lik $\frac{c_2}{2}e^{-ax}$.

Oppgave 6 Finn en partikulærløsning av differentsialligningen

$$4y'' + 4y' + y = 3\cos\frac{t}{2}.$$

A: $te^{-\frac{1}{2}t}$ **B:** $\cos\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}$ $\boxed{\textbf{C:}\ \frac{3}{2}\sin\frac{t}{2}}$ **D:** $-3\cos\frac{t}{2}$

Vi bruker metoden for ubestemte koeffisienter for å finne en partikulær løsning på formen $y_p = A\cos\frac{t}{2} + B\sin\frac{t}{2}$. Utregningen gir

$$4y''+4y'+y = -A\cos\frac{t}{2} - B\sin\frac{t}{2} - 2A\sin\frac{t}{2} + 2B\cos\frac{t}{2} + A\cos\frac{t}{2} + B\sin\frac{t}{2} = 2B\cos\frac{t}{2} - 2A\sin\frac{t}{2}.$$

Vi får da $B = \frac{3}{2}$ og $A = 0$. Det gir svaret $y(t) = \frac{3}{2}\sin\frac{t}{2}$.

Oppgave 7 Hvilket alternativ er en partikulærløsning av differensialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2},\ x > 0?$$

A: $y = \frac{e^{-3x}}{x}$ $\boxed{\textbf{B:}\ y = -e^{-3x}\ln x}$ **C:** $y = \frac{2e^{-3x}}{x^2}$ **D:** $y = xe^{-3x}\ln x + x^2e^{-3x}$

Vi ser først på homogen ligning $y'' + 6y' + 9y = 0$. Dens karakteristiske ligning $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ har én rot $\lambda = -3$. Da er $y_1(x) = e^{-3x}$ og $y_2(x) = xe^{-3x}$ to lineært uavhengige løsninger. Vi bruker metoden med variasjon av parametre for å finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Vi har $r(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2}$ og $W(y_1, y_2) = e^{-3x}(e^{-3x} - 3xe^{-3x}) - (-3e^{-3x})xe^{-3x} = e^{-6x}$. En partikulær løsning blir

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)}dx + y_2 \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)}dx = -e^{-3x} \int \frac{dx}{x} + xe^{3x} \int \frac{dx}{x^2} = -e^{-3x} \ln x - e^{-3x}.$$

Men e^{-3x} er en løsning av den homogene ligningen, og da er $-e^{-3x} \ln x$ også en partikulær løsning.

Oppgave 8 Bestem redusert echelonform (redusert trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A:} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{SWAP(R_1,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{SWAP(R_2,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_2+R_1]{2R_2+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{13}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_3+R_2]{7R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 9 Dersom matrisen A er slik at $A^2 + A + I = 0$ (hvor I er identitetsmatrisen), hva blir da A^{-1}?

A: $2A + I$ **B:** $A + I$ $\boxed{\textbf{C:}\ -A - I}$ **D:** $A - I$

Vi har $I = -A^2 - A = A(-A - I)$, så er A invertibel og $A^{-1} = -A - I$.

Oppgave 10 For hvilke(n) k er matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{invertibel?}$$

A: $k = 0$ $\boxed{\textbf{B:}\ k \neq 0}$ **C:** $k = 1$ **D:** $k \neq 1$

Vi skal regne ut determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (k - 1) - (2k - 1) = -3k.$$

Determinanten er ulik null når $k \neq 0$. Da er matrisen invertibel hvis og bare hvis $k \neq 0$.