# SEMESTERPRØVE I TMA4115, MATEMATIKK 3

Onsdag 15. mars 2006

*Løsningsforslag*

**Oppgave 1** Hvilket av alternativene er en løsning av ligningen $z^3 = e^{i11\pi/3}$?

$\boxed{\textbf{A:}}$ $e^{i5\pi/9}$ **B:** $e^{i\pi/3}$ **C:** $e^{i7\pi/9}$ **D:** $e^{i8\pi/9}$

For det første gjelder $e^{i11\pi/3} = e^{i5\pi/3}$. Løsningene blir dermed

$$z = e^{i(\frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3})}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$ gir løsning $e^{i5\pi/9}$.

**Oppgave 2** Hva er imaginærdelen til det komplekse tallet $\dfrac{(1+2i)^2}{3-4i}$ ?

**A:** 5 **B:** 1 **C:** -5 $\boxed{\textbf{D:}}$ 0

Vi regner først ut telleren: $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$. Vi ser dermed at det komplekse tallet er $z = -1$, slik at imaginærdelen blir null.

**Oppgave 3** For hvilken verdi av parameteren $k$ har differensialligningen $y'' + 4y' + 2ky = 0$ en basis på formen $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\}$, der $\alpha$ er et reelt tall?

**A:** $-1$ **B:** 0 **C:** 1 $\boxed{\textbf{D:}}$ 2

Basisen blir på denne formen når karakteristisk ligning har en dobbelrot. Kar. ligning er $\lambda^2 + 4\lambda + 2k = 0$, med løsning

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8k}}{2}.$$

**Oppgave 4** Hva blir $y(2)$ for løsningen av initialverdiproblemet

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1, \;\; y'(1) = 3?$$

**A:** 2 **B:** 4 **C:** 6 $\boxed{\textbf{D:}}$ 8

Dette er en Euler-Cauchy ligning, så vi må sette inn $y = x^m$. Vi får da ligningen $m^2 - 7m + 12 = 0$ for $m$, med løsninger $m = 3$ og $m = 4$. Altså er generell løsning $y(x) = Ax^3 + Bx^4$. Innsetting av initialverdiene gir ligningsystemet

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ 3A + 4B &= 3, \end{aligned}$$

med løsning $A = 1$, $B = 0$, slik at generell løsning blir $y(x) = x^3$.

**Oppgave 5** Hvilket alternativ vil gi en partikulærløsning av differensialligningen $y'' + 4y = x \sin 2x$ ?

**A:** $(A + Bx)\sin 2x$ **B:** $(A + Bx)\sin 2x + (C + Dx)\cos 2x$
$\boxed{\textbf{C:}}$ $(Ax + Bx^2)\sin 2x + (Cx + Dx^2)\cos 2x$ **D:** $(Ax^2 + Bx^3)\sin 2x + (Cx^2 + Dx^3)\cos 2x$

Den homogene ligningen $y'' + 4y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 + 4 = 0$ med røtter $\lambda_1 = -2i$ og $\lambda_2 = 2i$. Da er $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Når $r(x) = x \sin 2x$ skal vi normalt prøve med $(Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x$, men siden $\sin 2x$ og $\cos 2x$ er løsninger av den homogene ligningen, må vi modifisere ved å multiplisere hele uttrykket med $x$.

**Oppgave 6** Finn en partikulærløsning $y_p$ for differensialligningen

$$y'' - 6y' + 9y = 4x^{-3}e^{3x}, \quad x > 0.$$

**A:** $x(x^{-2} + x^{-1} + 1)$ **B:** $x^{-1}e^{3x}$ $\boxed{\textbf{C:}}$ $2x^{-1}e^{3x}$ **D:** $4x^{-3}e^{3x}$

Den tilhørende homogene ligningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. En basis for den homogene ligningen er følgelig $y_1 = e^{3x}, y_2 = xe^{3x}$. Vi bruker metoden med variasjon av parametre, og søker en partikulærløsning på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Formelen i Kreyzig 2.10, med Wronskideterminant $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{6x}$, gir

$$y_p = -e^{3x} \int \frac{xe^{3x}4x^{-3}e^{3x}}{e^{6x}} dx + xe^{3x} \int \frac{e^{3x}4x^{-3}e^{3x}}{e^{6x}} dx = 4e^{3x}x^{-1} - 2xe^{3x}x^{-2} = 2x^{-1}e^{3x}$$

**Oppgave 7** Gitt at $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. Hva er da $A^{-1}$?

**A:** $\begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ **B:** $\begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 46 & 38 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{C:}}$ $\begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 21 & -9 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$

Vi bør her benytte at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Det følger at

$$A^{-1} = BB^{-1}A^{-1} = B(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 8** Gitt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Dersom $2 \times 2$-matrisen $A$ er slik at $A \cdot \mathbf{b} = 3\mathbf{b}$, hva er da $(A - 5I) \cdot \mathbf{b}$ ?
(her betegner $I$ $2 \times 2$-identitetsmatrisen.)

**A:** $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **B:** $\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{D:}}$ $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Det følger ved assosiativitet at $(A - 5I)\mathbf{b} = A\mathbf{b} - 5\mathbf{b} = 3\mathbf{b} - 5\mathbf{b} = -2\mathbf{b}$.

**Oppgave 9** Hvilket av alternativene er den reduserte echelonformen (reduserte trappeformen) av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ?$$

$\boxed{\textbf{A:}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **B:** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vi gjør Gauss-Jordan eliminering på standard måte. Først reduserer vi matrisen til echelonform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Videre skalerer vi de ledende elementene til 1, og eliminerer oppover for å få 0 over de ledende elementene:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 10** For hvilket valg av konstant $a$ har det homogene ligningssystemet

$$\begin{array}{rrr} x & & +2z = 0 \\ ax & -y & +3z = 0 \\ 3x & +y & -az = 0 \end{array}$$

*uendelig* mange løsninger?

**A:** $a = 0$ $\boxed{\textbf{B:}}$ $a = -1$ **C:** $a = 1$ **D:** $a = \frac{1}{3}$

En grei måte å løse oppgaven på er å sette opp koeffisientmatrisen og beregne dennes determinant. Det homogene systemet har uendelig mange løsninger hvis og bare hvis determinanten er lik null. Vi finner

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -a \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-3) + 2(a+3) = 3a+3.$$