Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I SIF5009 MATEMATIKK 3

Bokmål

Fredag 22. desember 2000

Oppgave 1

a) Vi har

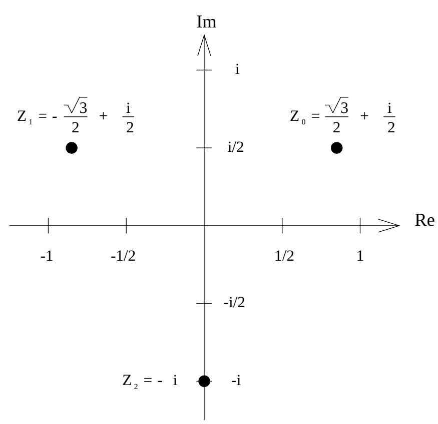
$$z^3 = i \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{i3\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad r = 1,\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

som gir

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Tredjerøttene av i er derfor

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
z_1 &= e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
z_2 &= e^{i\frac{9\pi}{6}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$



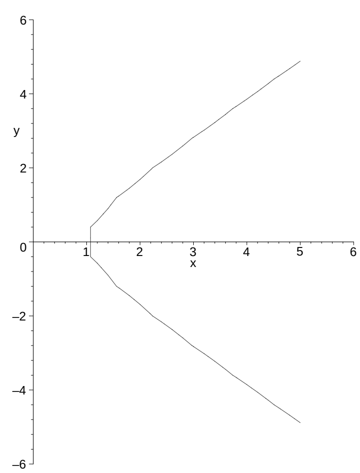
Figur til oppgave 1 a).

b) Vi skriver ut det oppgitte uttrykket

$$
\begin{gathered}
|z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| = 2 \\
\Updownarrow \\
\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2} = 2 \\
\Updownarrow \\
(x+\sqrt{2})^2 = 4 + 4\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2} + (x-\sqrt{2})^2 \\
\Updownarrow \\
\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2} \\
\Downarrow \\
(\sqrt{2}x-1)^2 = ((x-\sqrt{2})^2+y^2) \\
\Updownarrow \\
x^2 - y^2 = 1 \\
\Updownarrow \\
\underline{x = \pm\sqrt{y^2+1}}.
\end{gathered}
$$

Men hvis $x < 0$ så vil $|z+\sqrt{(2)}| < |z-\sqrt{2}|$, slik at negative x ikke kan gi noen løsning. Det samme kan vi se i 4. linje i utledningen, x blir positiv. Dermed får vi løsningene

$$\underline{\underline{x = \sqrt{y^2+1}}}$$



Figur til oppgave 1 b).

Oppgave 2

a) Med $x > 0$ kan vi dividere med x og får

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, \quad y(1) = 2.$$

Generell løsning av differensialligningen finnes ved

$$h = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x, \quad F(x) = e^h = e^{2\ln x} = x^2.$$

Multiplikasjon med $F(x)$ på begge sider av ligningen gir

$$(x^2y)' = 4x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x^2y = x^4 + c \qquad \Rightarrow \qquad y = x^2 + c\frac{1}{x^2}.$$

Med initialbetingelsen $y(1) = 2 = 1 + c$ får vi at $c = 1$. Løsning på initialverdiproblemet er derfor

$$\underline{\underline{y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.}}$$

b) Eulers metode er

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Vi har $f(x,y) = 4x - \frac{2}{x}y$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $h = \frac{1}{2}$ og $x_{n+1} = x_n + h$. Med dette får vi :

$$\begin{aligned}
y(\tfrac{3}{2}) &\approx y_1 = y_0 + \tfrac{1}{2}(4x_0 - \tfrac{2}{x_0}y_0) = 2, \quad x_1 = \tfrac{3}{2}\\
y(2) &\approx y_2 = y_1 + \tfrac{1}{2}(4x_1 - \tfrac{2}{x_1}y_1) = \tfrac{11}{3}, \quad x_2 = 2\\
y(\tfrac{5}{2}) &\approx y_3 = y_2 + \tfrac{1}{2}(4x_2 - \tfrac{2}{x_2}y_2) = \tfrac{35}{6}, \quad x_3 = \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

og

$$\underline{\underline{y(\frac{5}{2}) \approx \frac{35}{6}.}}$$

Avviket i svaret er da

$$\begin{aligned}
|y(\tfrac{5}{2}) - y_3| &= |\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 - \tfrac{35}{6}|\\
&= \underline{\underline{|\tfrac{641}{100} - \tfrac{35}{6}| \approx 0.57667.}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Karakteristisk ligning $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ har røttene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Den tilhørende homogene ligningen har derfor løsning

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{x/2}.$$

Siden 1 er rot i den karakteristiske ligningen og høyresiden er $2xe^x$, er partikulærløsningen på formen

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^x.$$

Innsatt i differensialligningen

$$2y_p'' - 3y_p' + y_p = (2Ax + B + 4A)e^x = 2xe^x,$$

og vi får ligningene $2A = 2$ og $B + 4A = 0$, som gir $A = 1$ og $B = -4$. Generell løsning er

$$\underline{\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{x/2} + (x^2 - 4x)e^x.}}$$

b) Karakteristisk ligning $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ har røttene $\lambda_1 = 1 + i$ og $\lambda_2 = 1 - i$. Den tilhørende homogene ligningen har derfor løsning

$$y_h(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Formen på høyresiden gjør at vi må bruke variasjon av parametre for å finne en partikulær løsning. Partikulærløsningen y_p har formen $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$, der u og v oppfyller

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

Setter vi inn $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$ og $r(x) = e^x / \cos x$ får vi

$$\begin{bmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{\cos x} \end{bmatrix}$$

som har løsningen $u' = \sin x / \cos x$ og $v' = 1$, slik at

$$u(x) = \int 1\, dx = x, \qquad v(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \ln \cos x \qquad \text{siden } \ |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Partikulærløsningen blir da

$$y_p(x) = e^x(\cos x \ln \cos x + x \sin x)$$

og generell løsning er

$$\underline{\underline{y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x(\cos x \ln \cos x + x \sin x).}}$$

Oppgave 4

a) Løser systemet vha. Gauss-eliminasjon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & 3 & b \\ 3 & 1 & 2 & -1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b-a \\ 0 & -2 & -4 & -4 & c-3a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-5a+2b \end{array}\right].$$

Systemet vil ha en løsning hvis og bare hvis $\underline{\underline{-5a+2b+c=0}}$

$\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ er rommet av alle vektorer som står ortogonalt på vektorene i kolonnerommet til A. Rangen til matrisa er 2, dvs. $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$ og $\dim(\mathrm{Col}(A)^{\perp}) = 3-2 = 1$, det betyr at det er nok å finne en vektor forskjellig fra nullvektoren som står ortogonalt på $\mathrm{Col}(A)$. Nå vet vi også at systemet ovenfor har en løsning hvis og bare hvis høyresiden ligger i $\mathrm{Col}(A)$. Betingelsen

$$-5a+2b+c = [-5\ 2\ 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

forteller at høyresida ligger i $\mathrm{Col}(A)$ hvis og bare hvis den står ortogonalt på vektoren $(-5,2,1)$, som dermed må være den etterlyste vektoren.

$$\underline{\underline{\text{En basis for } \mathrm{Col}(A)^{\perp} \text{ er } \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

(Alternativt kan man finne alle $\mathbf{x}$ slik at $\mathbf{x}^T A = [0,0,0,0]$, det vil si løse $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

b) Generell løsning av systemet kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$, hvor $\mathbf{x}_h$ er løsning på tilhørende homogene ligning og $\mathbf{x}_p$ er en partikulærløsning av det inhomogene systemet. Siden vi har oppgitt en partikulærløsning av det inhomogene systemet $\mathbf{x}_p = (0,1,1,-1)$ behøver vi kun å finne løsning på systemet $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$. I del a) utførte vi Gauss eliminasjon på A. Ved å velge $x_4 = t$, $x_3 = s$ som frie parametre vil $x_2 = -2s-2t$ og $x_1 = t$. Vi får da

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} t \\ -2s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og løsningene på ligningssystemet er derfor alle på formen

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

En basis for Null(A) er

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}.$$

c) Vi ser fra punkt a) at en basis for Col(A) og Row(A) er

$$\text{Col}(A): \quad \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}, \quad \text{Row}(A): \quad \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}.$$

Oppgave 5

a) For å finne en basis for V blant de gitte vektorene arrangerer vi dem som kolonner i en matrise og utfører Gauss eleminasjon på matrisen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for Ver derfor

$$\underline{\underline{\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}.$$

b) For å finne en ortogonal basis for V brukes Gram-Schmidt ortogonaliseringsalgoritme på basisvektorene. Vi får

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \quad \text{velger } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{7}{15}\begin{bmatrix}1\\3\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4/5\\3/5\\1/5\\3/5\end{bmatrix}$$

$$\text{velger } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-4\\3\\1\\3\end{bmatrix}.$$

En ortogonal basis for V er

$$\underline{\underline{\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\3\\1\\3\end{bmatrix}\}.}}$$

Oppgave 6

a) Karakteristisk ligning er

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -3-\lambda & 3 \\ 2 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-4-\lambda)((-3-\lambda)(-4-\lambda) - 3\cdot 1) - 1(3(-4-\lambda) - 3\cdot 2) \\
&\quad + 2(3\cdot 1 - (-3-\lambda)2) \\
&= -\lambda^3 - 11\lambda^2 - 30\lambda = -\lambda(\lambda+5)(\lambda+6) = 0.
\end{aligned}$$

Egenverdiene er

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -5 \text{ og } \lambda_3 = -6.}}$$

Løsning av ligningssystemene $(A - \lambda_i I)\mathbf{v_i} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3$ gir tilhørende egenvektorer:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \begin{bmatrix}-4 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{bmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

da

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 0 & 3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

(Nok å se på to lineært uavhengige radvektorer, den tredje må være en lineærkombinasjon av disse.)

$$\lambda_1 = -5, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da

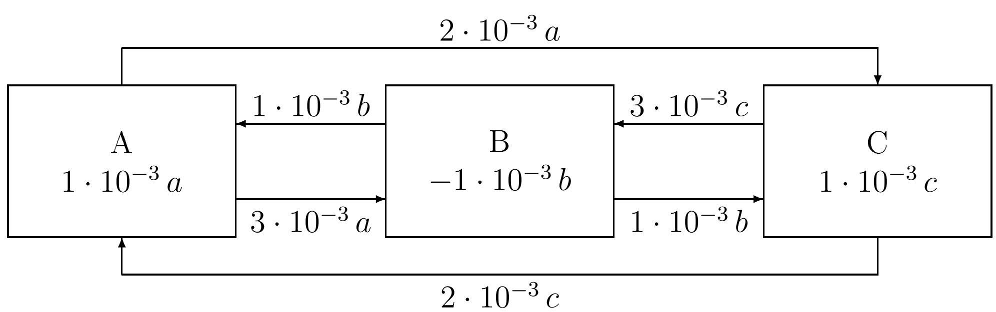
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -6, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Et mulig valg av P og D er

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

b) Situasjonen kan tegnes opp:



Vi får følgende:

$$a'(t) = \overbrace{1 \cdot 10^{-3}\, a(t)}^{\text{Intern vekst i A}} + \overbrace{1 \cdot 10^{-3} b(t) + 2 \cdot 10^{-3} c(t)}^{\text{Innflytting fra B og C}} - \overbrace{(3 \cdot 10^{-3} a(t) + 2 \cdot 10^{-3} a(t))}^{\text{Utflytting til B og C}}$$

$$b'(t) = \overbrace{-1 \cdot 10^{-3}\, b(t)}^{\text{Intern vekst i B}} + \overbrace{3 \cdot 10^{-3} a(t) + 3 \cdot 10^{-3} c(t)}^{\text{Innflytting fra A og C}} - \overbrace{(1 \cdot 10^{-3} b(t) + 1 \cdot 10^{-3} b(t))}^{\text{Utflytting til A og C}}$$

$$c'(t) = \overbrace{1 \cdot 10^{-3}\, c(t)}^{\text{Intern vekst i C}} + \overbrace{2 \cdot 10^{-3} a(t) + 1 \cdot 10^{-3} b(t)}^{\text{Innflytting fra B og C}} - \overbrace{(2 \cdot 10^{-3} c(t) + 3 \cdot 10^{-3} c(t))}^{\text{Utflytting til A og B}}$$

Systemet av differensialligninger blir

$$\mathbf{y}' = B\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{db}{dt} \\ \frac{dc}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} (1-3-2)a(t) + b(t) + 2c(t) \\ 3a(t) - (1+1+1)b(t) + 3c(t) \\ 2a(t) + b(t) + (1-2-3)c(t) \end{bmatrix},$$

og dermed får vi

$$\underline{\underline{B = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{1000} A.}}$$

Siden $\lambda_B \mathbf{v} = B\mathbf{v} = 1 \cdot 10^{-3} A\mathbf{v} = 1 \cdot 10^{-3} \lambda_A \mathbf{v}$ vil egenverdiene til B være $1/1000$ av egenverdiene til A mens egenvektorene er de samme. Generell løsning av systemet $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ blir da

$$\underline{\underline{\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/200} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t/500}.}}$$

c) Med initialbetingelsen får vi

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150000 \\ 200000 \\ 250000 \end{bmatrix},$$

som gir $c_1 = 160000$, $c_2 = 40000$ og $c_3 = -50000$. Befolkningsfordelingen på lang sikt, dvs. når $t \to \infty$, blir derfor

$$\text{A} : \underline{\underline{160000}}\,, \quad \text{B} : \underline{\underline{320000}}\,, \quad \text{C} : \underline{\underline{160000}}.$$

Oppgave 7 Vi ser på ligningen

$$(*) \quad c_1\mathbf{x} + c_2 A\mathbf{x} + c_3 A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Venstre multiplikasjon med A gir

$$(**) \quad c_1 A\mathbf{x} + c_2 A^2\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

siden $A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Av samme grunn (multipliser med A fra venstre) ser vi at $c_1 A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Antagelsen $A^2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gir derfor $c_1 = 0$. Ved å sette inn $c_1 = 0$ i $(**)$ finner vi at $c_2 = 0$, siden $A^2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ligningen $(*)$ reduserer seg derfor til $c_3 A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs. $c_3 = 0$. Konklusjon: ligningen $(*)$ har kun den trivielle løsningen, og vektorene $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}^2$ og $A^2\mathbf{x}$ er derfor lineært uavhengige.