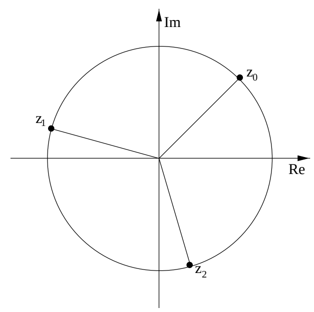
Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5009

desember 1999

Oppgave 1 **a)** Har at $z^3 = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$ slik at $z_k = \sqrt[6]{2}\, e^{\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) i}$, $k = 0, 1, 2$. Setter inn for k og får

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{11\pi}{12} i}$$
$$\underline{\underline{z_2}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{19\pi}{12} i}}}$$



b) Av figuren ser vi at $w = z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{11\pi}{12} i}$. For at w^n skal være reell kan vi for eksempel bruke $\underline{\underline{n = 12}}$. Dette gir da $w^n = w^{12} = -4$.

Oppgave 2 **a)** Vi skal løse differensialligningen

$$xy' + 2y = \cos x, \;\; x > 0.$$

Finner først integrerende faktor $\rho = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$. Videre

$$x^2 y = \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C,$$

som gir den generelle løsningen

$$\underline{\underline{y = \frac{\cos x + x \sin x + C}{x^2}, \;\; x > 0.}}$$

b) Finner først karakteristisk ligning, og løser denne.

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \pm 2i.$$

Den generelle løsningen blir derfor $y = c_1\, e^x \cos 2x + c_2\, e^x \sin 2x$. Deriverer denne og finner

$$y' = c_1\, e^x \cos 2x - 2c_1\, e^x \sin 2x + c_2\, e^x \sin 2x + 2c_2\, e^x \cos 2x.$$

Setter inn initialverdiene, og får

$$\left.\begin{array}{rcccl} 3 & = & y(0) & = & c_1 \\ -1 & = & y'(0) & = & c_1 + 2c_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 3 \\ c_2 & = & -2 \end{array}.$$

Dette gir løsningen

$$\underline{\underline{y = 3e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x.}}$$

c) Den homogene delen av løsningen er funnet over, $y_h = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$. Vi søker nå en partikulær løsning på formen $y_p = A\cos x + B\sin x$. Finner

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos x + B\sin x \\ y_p' &= B\cos x - A\sin x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\sin x, \end{aligned}$$

slik at $10\sin x = (5A - 2B - A)\cos x + (5B + 2A - B)\sin x$, og

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A - 2B & = & 0 \\ 2A + 4B & = & 10 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 2 \end{array},$$

som gir løsningen

$$\underline{\underline{y = c_1\, e^x \cos 2x + c_2\, e^x \sin 2x + \cos x + 2\sin x.}}$$

d) Løser karakteristisk ligning

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -2,\ \text{multiplisitet} = 2,$$

slik at $y_h = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ der $y_1 = e^{-2x}$ og $y_2 = xe^{-2x}$. Vi vil finne den partikulære løsningen ved variasjon av parametrene. La $y_p = u_1\, y_1 + u_2\, y_2$ der

$$\begin{array}{rcl} y_1\, u_1' + y_2\, u_2' & = & 0 \\ y_1'\, u_1' + y_2'\, u_2' & = & \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} u_1' + x\, u_2' & = & 0 \\ -2u_1' + (1-2x)u_2' & = & \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{array}.$$

Dette gir at $u_1' = -\frac{1}{x}$ og $u_2' = \frac{1}{x^2}$, og videre at $u_1 = -\ln x$ og $u_2 = -\frac{1}{x}$. Generell løsning blir da

$$\underline{\underline{y = c_1\, e^{-2x} + c_2\, xe^{-2x} - e^{-2x}\ln x,\ \ x > 0.}}$$

idet $u_2\, y_2 = -e^{-2x}$ tas med i $c_1\, e^{-2x}$-leddet.

Oppgave 3 Systemet blir $2y'' + 8y = \cos\omega t$, som har karakteristisk ligning

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i.$$

For at løsningen $y(t)$ ikke skal være begrenset må $\underline{\underline{\omega = \pm 2}}$.

Oppgave 4 **a)** Gauss-eliminasjon på totalmatrisen gir

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & 4 & 7 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Av dette følger at vi har to frie variable, x_2 og x_4. Den generelle løsningen til ligningssystemet er derfor gitt ved

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \ s, t \in \mathbb{R}}}$$

En basis for $\mathrm{Null}(A)$ er gitt ved vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vi har at $\mathrm{Row}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(A)$, så en basis for dette rommet er gitt over. En basis for $\mathrm{Col}(A)$ er gitt ved vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 **a)** Egenverdiligningen

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0$$

gir egenverdiene

$$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}\ ,\ \underline{\underline{\lambda_2 = 1}} \text{ og } \underline{\underline{\lambda_3 = 5}}.$$

Finner egenvektorer på vanlig måte:
$\lambda_1 = -1$:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\underline{\mathbf{x}_{(1)} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\ ,\ t \neq 0.}}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\underline{\mathbf{x}_{(2)} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ t \neq 0.}}$$

$\lambda_3 = 5$:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\underline{\mathbf{x}_{(3)} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ t \neq 0.}}$$

b) Matrisen A er symmetrisk så egenvektorene $\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}$ og $\mathbf{x}_{(3)}$ er allerede ortogonale. Vi finner dermed matrisen P ved å sette inn de normaliserte egenvektorene som kolonner i denne. Matrisen D er da gitt som diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen. Det vil si

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}}}\ ,\ \underline{\underline{D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}}\ .$$

c) Fra **a)** har vi egenverdiene med tilhørende egenvektorer. Den generelle løsningen av differensialligningssystemet er derfor gitt ved

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 6 Kjeglesnittet

(1)
$$8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 = 80$$

kan skrives på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 80$ dersom

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Vi har da at

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = (\lambda - 5)(\lambda - 20),$$

hvilket betyr at A har egenverdiene $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = 20$. Finner tilhørende egenvektorer:
$\lambda_1 = 5$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \ \mathbf{x}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 20$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \ \mathbf{x}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definér nye koordinater $\mathbf{x}'$ ved $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ der

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da har vi at

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

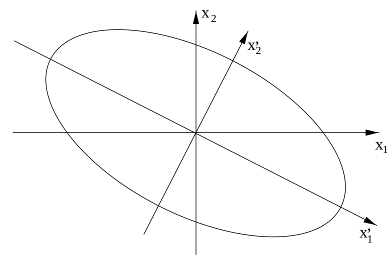
og innsatt i (1) gir dette i de nye koordinatene

$$5(x_1')^2 + 20(x_2')^2 = 80,$$

hvilket betyr

$$\frac{(x_1')^2}{16} + \frac{(x_2')^2}{4} = 1,$$

som er en ellipse.



Oppgave 7 **a)** V er radrommet til matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dvs. $V^\perp = \mathrm{Null}(B)$, og Gram-Schmidt algoritmen gir oss en basis for nullrommet til B:

$$B\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Derfor er $\underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ en basis for $V^\perp$.

b) Skal finne en 3×4 matrise A slik at $V = \mathrm{Null}(A)$. Det vil si at $V^\perp = \mathrm{Row}(A)$. Vi kan da bruke basisen for $V^\perp$ som vi allerede har funnet, og sette opp A.

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.}}$$

Da er $V = \mathrm{Null}(A)$.