



LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5009/10 MATEMATIKK 3
14. august 2000

Oppgave 1

Anta $x > 0$ og divider med x . En integrerende faktor er $e^{\int (-3/x)dx} = e^{-3 \ln x} = x^{-3}$, og vi får

$$x^{-3}y = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$$

dvs. $y = x^3 \ln x + cx^3$. Fra $y(1) = 0$ fås $c = 0$, og $y = x^3 \ln x, \quad x > 0.$

Oppgave 2

- a) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a = 0$ gir for $a = 1$, $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, og for $a = -1$, $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Fra $y_p = Ax + B$ fås $y_p = a^{-1}x$, så generell løsning er

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \text{ for } a = 1, \\ \underline{\underline{y &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x \text{ for } a = -1.}} \end{aligned}$$

- b) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ har $\lambda = -1$ som dobbelrot, så $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. For y_p får vi for

$$\begin{aligned} b \neq -1 : y_p &= A e^{bx}, \text{ som innsatt gir } A = \frac{1}{(b+1)^2}, \\ b = -1 : y_p &= A x^2 e^{-x}, \text{ som innsatt gir } A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Generell løsning er da

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{e^{bx}}{(b+1)^2} \text{ for } b \neq -1, \\ \underline{\underline{y &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \text{ for } b = -1.}} \end{aligned}$$

- c) Fra b) har vi $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ der $y_1 = e^{-x}$ og $y_2 = x e^{-x}$. For å finne y_p bruker vi variasjon av konstantene, dvs. y_p har formen $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ der u_1 og u_2 oppfyller

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0 \\ y_1' u_1 + y_2' u_2 &= \sqrt{x} e^{-x}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} u_1' + x u_2' &= 0 \\ -u_1' + (1-x) u_2' &= \sqrt{x}, \end{aligned}$$

$$\text{og } u_2 = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}, \quad u_1 = -\int x^{3/2} dx = -\frac{2}{5} x^{5/2}.$$

Innsatt i y_p gir dette generell løsning

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{4}{15} x^{5/2} e^{-x} .}}$$

Oppgave 3

Vi bringer først A -delen av $[A|\mathbf{b}]$ på echelonform ved hjelp av radoperasjoner. Det gir

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & \alpha & 3\beta \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 5 & 2\beta \\ 1 & -2 & 5 & -4 & -1 & \beta \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2-2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 4-3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\beta-7 \end{array} \right].$$

- a) Vi ser at for

$$\alpha \neq 7 : \dim \text{Col}(A) = 3, \dim \text{Null}(A) = 2$$

$$\underline{\underline{\alpha = 7 : \dim \text{Col}(A) = 2, \dim \text{Null}(A) = 3.}}$$

- b) Vi ser at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsbart hvis og bare hvis $\beta = 1$ og $\alpha \neq 7$. Med $\beta = 1$ og $\alpha = 6$ løses $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved hjelp av tilbakesubstitusjon i echelonformen, og vi får løsningene

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} .}}$$

Oppgave 4

a) Gram-Schmidt gir

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Videre får vi

$$\begin{aligned} \text{proj}_V \mathbf{b} &= \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \mathbf{u}_2 + \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3} \right) \mathbf{u}_3 \\ &= \frac{6}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er $V = \text{Row}(A)$, og derfor er $U = \text{Row}(A)^\perp = \text{Null}(A)$. En basis for $\text{Null}(A)$ fås ved å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ dvs. } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R}.$$

En basis for U er da $(1, 1, -1, -1, 0)$, $(1, 0, -1, 0, -2)$.

Oppgave 5

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 5 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 7 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(7 - \lambda) = 0 \quad \text{gir } \underline{\underline{\lambda_3 = 5, \lambda_4 = 7.}} \end{aligned}$$

Eigenvektorer er for $\lambda_3 = 5$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{v}_3 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.}}$$

For $\lambda_4 = 7$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{v}_4 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.}}$$

b) Siden $\det A = \det(A - 0I) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 0$, eksisterer A^{-1} . Fra

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda A^{-1}x \Leftrightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

ser vi at egenverdiene til A^{-1} er $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ fra a).

Oppgave 6

Kjeglesnittligningen svarer til $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = a$ der $\mathbf{x} = [x \ y]^T$ og

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

A har egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 5$ (fra $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$), og med nye koordinater $\tilde{\mathbf{x}}$ blir ligningen $2\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 = a$, eller

$$\frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{\frac{a}{2}})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{\frac{a}{5}})^2} = 1.$$

Vi ser at kjeglesnittet oppfyller kravet i oppgaven hvis og bare hvis $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{a}{5}}$ og $\sqrt{\frac{a}{2}} < 1$, dvs. $\frac{5}{4} < a < 2$.