Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag SIF5010 Matematikk 3, 14. august 2002

Oppgave 1

Likninga $(z+1)^4 = (z-1)^4$ er ekvivalent med $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$. Derfor er $\dfrac{z-1}{z+1} = w$, der w står for fjerderøttene av 1, altså $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -i$, $w_4 = -1$. Vi har $z = \dfrac{1+w}{1-w}$, altså $z_1 = 0$, $z_2 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$, $z_3 = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$. ($w = -1$ svarer til $z = \infty$, som ikke er en løsning.)

Alternativ framgangsmåte:

Direkte utregning (f.eks. ved binomialformelen) gir at $(z+1)^4 = (z-1)^4$ er ekvivalent med $z^3 + z = 0$, altså $z(z^2+1) = 0$. Røttene er $z = 0$, $z = \pm i$.

Oppgave 2

a) Differensiallikninga har en integrerende faktor $e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$, og kan derfor skrives som $\left(\dfrac{1}{x^2}y\right)' = e^x$. Integrasjon gir $\dfrac{1}{x^2}y = e^x + C$, så generell løsning er $y = x^2(e^x + C)$. Initialkravet $y(1) = 0$ gir $C = -e$, og dermed $y = x^2(e^x - e)$.

b) $y' = f(x,y) = \dfrac{2y}{x} + x^2e^x \quad y(1) = 0,\ x > 0$

Eulers metode med skrittlengde $h = \dfrac{1}{2}$:

$x_{n+1} = x_0 + nh = 1 + n\dfrac{1}{2}$

$y_0 = y(1) = 0$

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2y_n}{x_n} + x_n^2e^{x_n}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)y_n + \dfrac{x_n^2}{2}e^{x_n}$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

OBS: $y_n \approx y(x_n)$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}e^1 = \frac{e}{2} = 1,3591 \approx y\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y_2 = \frac{5}{6}e + \frac{9}{8}e^{\frac{3}{2}} \approx 7{,}3071 \approx y(2)$$

$$y_3 = \underline{\underline{\frac{5}{4}e + \frac{27}{16}e^{\frac{3}{2}} + 2e^2 \approx 25,7388 \approx y\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

Oppgave 3

a) Karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ har røttene $\lambda = 1 \pm 2i$. Generell løsning blir derfor $y = e^x[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$, med $y' = e^x[(C_1 + 2C_2)\cos 2x + (C_2 - 2C_1)\sin 2x]$. $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ gir $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{3}{2}$, altså $y = e^x[\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x]$.

b) Karakteristisk likning $\lambda^2 - a^2 = 0$ har røttene $\lambda = \pm a$ for $a > 0$, dobbeltrot $\lambda = 0$ for $a = 0$. Generell løsning av den homogene likning blir da $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$ for $a > 0$, $y = C_1 x + C_2$ for $a = 0$. For $a \neq 1$ har den inhomogene likning en partikulær løsning av form $y_0 = Ae^x$. Innsetting gir $A = \frac{1}{1 - a^2}$. For $a = 1$ har den inhomogene likning en partikulær løsning av form $y_0 = Axe^x$, der innsetting gir $A = \frac{1}{2}$.

Generell løsning blir altså:

$y = C_1 x + C_2 + e^x$ for $a = 0$,

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$ for $a = 1$,

$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{1}{1 - a^2}e^x$ for $0 < a < 1$ og $1 < a$.

c) Den homogene likninga har løsning $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, og den inhomogene likninga har derfor en partikulær løsning av form $y = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$. Funksjonene u_1 og u_2 bestemmes av likningssystemet

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$$

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \frac{1}{\tan x}.$$

Vi finner $u_1' = -\cos x$ og $u_2' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \sin x$, og dermed $u_1(x) = -\sin x$, $u_2(x) = \ln \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x$. Differensiallikninga har da en partikulær løsning

$y_0 = -\sin x\cos x + \ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)\sin x + \cos x\sin x = \sin x\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, og generell løsning blir $y = \sin x\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C_1\cos x + C_2\sin x$. (Generell løsning oppnås også direkte ved å ta med integrasjonskonstantene når en integrerer $u_1'(x)$ og $u_2'(x)$.)

Oppgave 4

a) Vi kan regne ut $\det(A)$ f.eks. ved å addere andre til tredje rad:

$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{vmatrix}$. Utvikling etter tredje rad gir nå

$\det(A) = -(\alpha-1)\left\{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}\right\} = (\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+2) = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$.

(Direkte utregning av den opprinnelige determinanten gir $\det(A) = \alpha^3 - 3\alpha + 2$. En ser lett at $\alpha = 1$ er et nullpunkt, og ved polynomdivisjon finner en

$\det(A) = (\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+2)$.)

For $\alpha = 1$ har vi

$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Likningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har da løsning

$x_1 = s - t, x_2 = s, x_3 = t$, altså $\vec{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

En basis for $\text{Null}(A)$ blir $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

b) Vi skal avgjøre om $c_1A\vec{u} + c_2A\vec{v} + c_3A\vec{w} = \vec{0}$ har bare nulløsningen, når $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er lineært uavhengige. Vi har

$\vec{0} = c_1A\vec{u} + c_2A\vec{v} + c_3A\vec{w} = A(c_1\vec{u} + c_1\vec{v} + c_3\vec{w})$.

Anta først at $\det(A) \neq 0$. Da er $A(c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+c_3\vec{w}) = \vec{0}$ bare når $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+c_3\vec{w} = \vec{0}$, altså når $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, siden $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er lineært uavhengie. Altså er $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$ lineært uavhengige.

Anta dernest at $\det(A) = 0$. Da fins en vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ slik at $A\vec{x} = \vec{0}$, og siden $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$ kan vi skrive $\vec{x} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w}$ med $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$. Altså er $c_1 A\vec{u} + c_2 A\vec{v} + c_3 A\vec{w} = \vec{0}$ for et trippel $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$, slik at $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$ er lineært avhengige.

Konklusjon: Implikasjonen gjelder nøyaktig når $a \notin \{1, -2\}$.

c) Egenverdiene til A er de verdiene λ som er slik at $\det(A - \lambda I) = 0$, altså

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ Setter vi } 1 - \lambda = \alpha$$

får vi $\lambda = 1 - \alpha$. Determinanten er null når $\alpha = -2$ og $\alpha = 1$, altså når $\lambda = \lambda_1 = 3$ og når $\lambda = \lambda_2 = 0$.

Vi har $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En egenvektor svarende til λ_1 er da $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tilsvarende er $A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

To lineært uavhengige egenvektorer svarende til λ_2 er da $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Matrisen $P = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

oppfyller da $A = PDP^{-1}$ der $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Oppgave 5

a) Gauss-reduksjon av totalmatrisen til likningssystemet gir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & : & -3 \\ 4 & -10 & 10 & 2 & : & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & : & -4 \\ 0 & -12 & 12 & 0 & : & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

Med $x_3 = s,\ x_4 = t$ får vi $x_2 = 1 + x_3 = 1 + s,\ x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2 + x_3 - x_4) = -\frac{1}{2}t$.

Løsningsvektorene blir da

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ 1+s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Gauss-reduksjon av A gir matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pivot-elementene er i første og annen linje, og i første og annen kolonne. En basis for $\mathrm{Row}(A)$ er da $\{(2,1,-1,1),\ (0,1,-1,0)\}$.

En basis for $\mathrm{Col}(A)$ er $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -10 \end{bmatrix}\right\}$.

$\mathrm{Null}(A)$ består av løsningene av det homogene likningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$. Fra a) får vi derfor at $\mathrm{Null}(A)$ har en basis $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

c) Vi har generelt at $\mathrm{Row}(B)^\perp = \mathrm{Null}(B)$. Siden $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Row}(A^\top)$ får vi med $B = A^\top$: $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A^\top)$. Gauss-reduksjon av $A^\top$ gir $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -10 \\ -1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Med $x_3 = t$ får vi $x_2 = -3t, x_1 = -x_2 - 2x_3 = t$. En basis for $\mathrm{Null}(A^\top)$, og dermed for $\mathrm{Col}(A)^\perp$, blir da $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(Legg merke til at $[1,-3,1]\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$, $[1,-3,1]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -10 \end{bmatrix} = 0$, slik at $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ virkelig er ortogonal til $\mathrm{Col}(A)$.)

Oppgave 6

a) Vi finner $(A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 1 \\ 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3)$. Egenverdiene er altså $\lambda = 0$ og $\lambda = -3$. For $\lambda = 0$ får vi $A - \lambda I \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En egenvektor er derfor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

For $\lambda = -3$ får vi $A - \lambda I \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En egenvektor er derfor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Av $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ følger $kA\vec{v} = k\lambda\vec{v}$. Matrisen kA har derfor egenverdiene $k\lambda$, der λ er egenverdiene til A, og samme egenvektorer som A.

b) For saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ finner vi differensiallikningssystemet

$$x_1' = \frac{4}{200}x_2 - \frac{4}{100}x_1$$
$$x_2' = \frac{4}{100}x_1 - \frac{4}{200}x_2,$$

altså

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{4}{100} & \frac{4}{200} \\ \frac{4}{100} & -\frac{4}{200} \end{bmatrix} \vec{x} = \frac{1}{50}A\vec{x},$$

der A er matrisen i punkt a.

Egenverdiene for $\dfrac{1}{50}A$ er da

$\mu_1 = 0$ og $\mu_2 = \dfrac{-3}{50} = -0,06$, med tilsvarende egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Generell løsning av systemet blir $\vec{x} = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0,06t}$.

For $t = 0$ har vi $x_1 = 0$, $x_2 = 30$. Dette gir $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - C_2 = 30$, altså $C_1 = 10$, $C_2 = 10$.

Løsningen blir da

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} e^{-0,06t}.$$

Oppgave 7

Vi skal vise at $|A - \lambda I| = 0$ og $|U^{-1}AU - \lambda I| = 0$ har samme løsninger.

Vi har $U^{-1}AU - \lambda I = U^{-1}AU - U^{-1}\lambda IU = U^{-1}(A - \lambda I)U$ og dermed $|U^{-1}AU - \lambda I| = |U^{-1}(A - \lambda I)U| = |U^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|U| = |A - \lambda I|$, siden $|U^{-1}| = \dfrac{1}{|U|}$. Dette viser at A og $U^{-1}AU$ har de samme egenverdiene.

Alternativ framgangsmåte:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} &\Leftrightarrow AU(U^{-1}\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow U^{-1}AU(U^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(U^{-1}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Dette viser at A og $U^{-1}AU$ har de samme egenverdier (men egenvektorene er transformert med U evt. U^{-1} i forhold til hverandre).