Løsningsforslag i fag SIF5009/SIF5010
Matematikk 3

Kontinuasjonseksamen Høsten 2003

Onsdag 6. august 2003

Oppgave 1:

Vi skriver om $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ på formen $z = re^{i\theta}$. Da blir $r^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$, og $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$ eller $\theta = \frac{2\pi}{3}$ da z ligger i andre kvadrant. Videre blir da

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2003} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2003} = e^{i(\frac{2\cdot 2\pi}{3} + 667\cdot 2\pi)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \underline{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Oppgave 2:

a) Generelt er Eulers metode gitt ved

$$y' = f(x,y), \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Her er $f(x,y) = x + y$, $h = 0.2$, $y_0 = -1$ og $x_0 = 0$. Dette gir

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$
0	0.0	−1.0	−0.2
1	0.2	−1.2	−0.2
2	0.4	−1.4	−0.2
3	0.6	−1.6	

Dette gir altså tilnærmingen $y(\frac{3}{5}) = \underline{-1.6}$.

b) For å finne eksakt løsning bruker vi den integrerende faktoren e^{-x}, slik at

$$[y'e^{-x}]' = xe^{-x}.$$

Ved integrasjon finner vi

$$ye^{-x} = \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C,$$

som gir $y = -(x+1) + Ce^x$. Initialbetingelsen $y(0) = -1$ gir $C = 0$. Løsningen av $(*)$ blir dermed $y = -(x+1)$, og

$$y(\tfrac{3}{5}) = -(\tfrac{3}{5} + 1) = -\tfrac{8}{5} = \underline{-1.6}.$$

Vi får samme svar som i a), siden løsningen av initialverdiproblemet $(*)$ er en rett linje, og Eulers metode tilnærmer slike eksakt.

Oppgave 3:

a) Generelt er $y = y_h + y_p$. For å finne den homogene løsningen y_h ser vi på $y'' + 3y' = 0$ som har karakteristisk ligning $\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3) = 0$. Dermed er

$$y_h = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{-3\cdot x} = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Partikulærløsningen y_p er av formen $y_p = Ax + Be^{-x}$. Innsatt får vi

$$Be^{-x} + 3A - 3Be^{-x} = 6 - 2e^x \quad \text{slik at} \quad A = 2, B = 1.$$

Den generelle løsningen blir dermed $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-3x} + 2x + e^{-x}$. Vi setter inn for initialverdiene, og finner

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad C_1 = -C_2 - 1, \\ -3C_2 + 2 - 1 = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad C_2 = 1. \end{aligned}$$

Samlet gir dette $C_1 = -2$ og $C_2 = 1$, slik at

$$\underline{y = -2 + e^{-3x} + 2x + e^{-x}}.$$

b) Vi finner først den homogene løsningen. Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Dermed er

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

For å finne partikulærløsningen bruker vi metoden med variasjon av parametere. Dette gir

$$y_p = ue^{2x} + vxe^{2x}$$

der

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x} \ln x \end{bmatrix}.$$

Ved å kansellere e^{2x} på begge sider finner vi da at

$$u' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln x & 1+2x \end{vmatrix} = -x \ln x \qquad \text{og} \qquad v' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \ln x \end{vmatrix} = \ln x.$$

Ved integrasjon blir $u = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$ og $v = x\ln x - x$. Dermed finner vi

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \tfrac{x^2}{4}(2\ln x - 3)e^{2x}}.$$

c) Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ med løsninger $\lambda = -1 \pm 2i$. Dette gir den homogene løsningen

$$y_h = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x.$$

Den partikulære løsningen er på formen $y_p = A\cos x + B\sin x$. Innsatt får vi

$$(-A + 2B + 5A)\cos x + (-B - 2A + 5B)\sin x = 10\cos x$$

eller $4A + 2B = 10, 4B - 2A = 0$ som har løsning $A = 2, B = 1$. Samlet får vi altså

$$\underline{y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x + 2\cos x + \sin x}.$$

Oppgave 4:

a) Vi finner først determinanten til A.

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} - (-\alpha)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha^2 - 1 - \alpha^4$$
$$= -(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1) = \underline{-(\alpha^2 - 1)^2}.$$

A er inverterbar for alle α slik at $\det A \neq 0$. Det vil si for $\underline{\alpha \neq \pm 1}$.

b) Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig en løsning når A er inverterbar, det vil si for $\alpha \neq \pm 1$. For $\alpha = \pm 1$ er (husk at $\alpha^2 = 1$),

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 1+\alpha \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right].$$

Vi ser at dersom $\alpha - 1 = 0$, det vil si $\alpha = 1$, får vi uendelig mange løsninger. For $\alpha = -1$ blir $\alpha - 1 = -2 \neq 0$ slik at ligningssystemet ikke får noen løsninger.

Oppgave 5:

a) Se nedenfor.

b) Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortonormal basis for $V = \text{span}\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$.

$$\tilde{\mathbf{x_2}} = \mathbf{x_2} - \frac{\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_1}}{\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_1}} \mathbf{x_1} = (1,2,2,2) - \tfrac{7}{4}(1,1,1,1) = \tfrac{1}{4}(-3,1,1,1).$$

En ortonormal basis for V er dermed $\underline{\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1)\}}$.

c) Vi har at

$$V^{\perp} = \text{Null} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Siden

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

blir nullrommet

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

med basis for eksempel $\underline{\{(0,1,0,-1),(0,1,-1,0)\}}$.

a) Et eksempel på en slik basis er da

$$\underline{\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, (0,1,0,-1), (0,1,-1,0)\}}.$$

Det finnes også andre muligheter!

Oppgave 6:

At A er ortogonal diagonaliserbar betyr at $AP = PD$ der $P^{-1} = P^T$. Da er $A = PDP^T$, og

$$A^T = (PDP^T)^T = P^{TT} D^T P^T = PDP^T.$$

Følgelig er $A^T = A$ slik at A er symmetrisk.

Oppgave 7:

a) Vi finner først egenverdiene til A,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\big((1+\lambda)(2+\lambda) - 1\big) - (-1-\lambda) \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda) = -\lambda(1+\lambda)(3+\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Egenverdiene til A er $\underline{\lambda_1 = 0}$, $\underline{\lambda_2 = -1}$ og $\underline{\lambda_3 = -3}$.

Vi skal så finne egenvektorene til A. For $\lambda = 0$ er systemet

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da blir egenvektorene gitt ved $\underline{s(1,1,1), s \neq 0}$. For $\lambda = -1$ er systemet gitt ved

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir egenvektorene $\underline{s(1,0,-1), s \neq 0}$. Til slutt har vi for $\lambda = -3$ systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De siste egenvektorene blir dermed $\underline{s(1,-2,1), s \neq 0}$.

b) Av det vi har funnet i a), ser vi at løsningen av systemet blir

$$\underline{\mathbf{y} = C_1 e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

c) Vi kan beskrive systemet ved hjelp av de følgende ligningene,

$$\tfrac{dx_1}{dt} = -k(x_1 - x_2), \tfrac{dx_2}{dt} = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3), \tfrac{dx_3}{dt} = k(x_2 - x_3).$$

Dette kan skrives $\mathbf{x}' = kA\mathbf{x}$ hvor A er som tidligere og $k = 0.01$. Denne ligningen har løsning

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-0.01t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{-0.03t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Når vi setter inn initialverdiene finner vi

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som gir $C_1 = 3$, $C_2 = 1$ og $C_3 = 1$. Følgelig blir

$$\underline{\mathbf{x} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-0.01t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-0.03t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

Når $t \to \infty$ går de to siste leddene mot 0, slik at

$$\mathbf{x} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som betyr at det vil <u>være like mye gass i hver tank</u>.