Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5010

19. mai 2000

Oppgave 1

$$\operatorname{Im}(z+i) = |z-i| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x+i(y+1)) = |x+i(y-1)| \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$
$$\underset{(*)}{\Rightarrow} (y+1)^2 = x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow (y+1)^2-(y-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 4y = x^2$$

Siden y blir positiv, slik at $y+1 \geq 0$, har vi ekvivalens også ved $(*)$.
Punktene (x,y) som oppfyller likheten utgjør parabelen $\underline{\underline{4y = x^2}}$.

Oppgave 2

a) Anta $x > 0$ og divider med x. En integrende faktor for $y' + \frac{3}{x}y = \frac{3}{x}e^{x^3}$ er $e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{3\ln x} = x^3$, og vi får

$$\frac{d}{dx}(x^3 y) = 3x^2 e^{x^3}$$

slik at

$$x^3 y = \int 3x^2 e^{x^3}\,dx = e^{x^3} + c.$$

Fra $y(1) = 0$ fås $c = -e$, og $\underline{\underline{y = (e^{x^3} - e)/x^3,\ x > 0}}$.

b) Den karakteristisike ligningen $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ har røttene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Siden -1 er rot i den karakteristiske ligningen, har y_p formen $y_p = x(A+Bx)e^{-x}$. Vi deriverer og får

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax + Bx^2)e^{-x} \\ y_p' &= (A + (2B-A)x - Bx^2)e^{-x} \\ y_p'' &= (2(B-A) + (A-4B)x + Bx^2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Innsatt gir dette

$$(2B + A + 2Bx)e^{-x} = -2xe^{-x}$$

slik at ligningene for koeffisientene blir

$$\begin{aligned} A + 2B &= 0 \\ 2B &= -2. \end{aligned}$$

Dermed blir $A = 2$ og $B = -1$. Generell løsning er da

$$\underline{\underline{y = y_h + y_p = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + (2x - x^2)e^{-x}.}}$$

c) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ har røttene $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Siden $\pm i$ ikke er rot i den karakteristiske ligningen, har y_p formen $y_p = A\cos x + B\sin x$. Vi deriverer og får

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos x + B\sin x \\ y_p' &= B\cos x - A\sin x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\sin x. \end{aligned}$$

Innsatt gir dette

$$(A - 2B)\cos x + (2A + B)\sin x = 5\sin x$$

slik at

$$\begin{aligned} A - 2B &= 0 \\ 2A + B &= 5. \end{aligned}$$

Dermed blir $A = 2$ og $B = 1$. Generell løsning er

$$\underline{\underline{y = y_h + y_p = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x + 2\cos x + \sin x.}}$$

d) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ har $\lambda = 1$ som dobbelrot, så generell løsning av den homogene ligningen er $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$.

På grunn av høyresiden brukes variasjon av konstantene, dvs. y_p har formen

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

der $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, og u_1 og u_2 oppfyller

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1u_1' + y_2u_2' \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{1+x^2} \end{bmatrix}.$$

Etter divisjon med e^x får vi da

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' + xu_2' \\ u_1' + (1+x)u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix}$$

og $u_2 = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$, $u_1 = \displaystyle\int \frac{-x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Så generell løsning er

$$\underline{\underline{y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(1+x^2) + xe^x \arctan x.}}$$

Oppgave 3
Med $y' = \sqrt{x+y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{4}$ og $h = \frac{1}{2}$ gir Eulers metode

$$y_{n+1} = y_n + h\sqrt{x_n + y_n},\ x_n = nh = \frac{1}{2}n.$$

Så

$$\begin{aligned} &y_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2},\ x_1 = \tfrac{1}{2} \\ &y_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1} = 1,\ x_2 = 1 \\ &\underline{\underline{y_3 = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}},\ x_3 = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Gauss-Jordan-eliminasjon på A gir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med $x_3 = s$ og $x_4 = t$ fås at løsningene av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}};\quad s, t \in \mathbb{R},$$

og en basis for Null(A) er $\underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$.

b) Fra (den reduserte) echelon-formen til A fås at en basis er for

$$\text{Row}(A) : \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad \text{Col}(A) : \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}}}.$$

c) Her er $\dim \text{Col}(A)^{\perp} = 4 - \dim \text{Col}(A) = 1$, og siden (1,5,1,-1) er ortogonal til de tre basisvektorene til Col(A), er $\text{Col}(A)^{\perp} = \text{span}\{(1,5,1,-1)\}$. Ligningssystemet har løsning hvis og bare hvis $(a,b,c,d) \in \text{Col}(A) = \text{span}\{(1,5,1,-1)\}^{\perp}$, dvs. hvis og bare hvis $(a,b,c,d) \bullet (1,5,1,-1) = 0$. Betingelsen er altså $\underline{\underline{a + 5b + c - d = 0}}$.

Oppgave 5

a)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1+\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$
$$= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$$
$$= -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

gir egenverdiene $\underline{\underline{\lambda = -1,\ 1 \text{ og } 6}}$.

Egenvektorer er for

$$\lambda = -1 : A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$\lambda = 1 : A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\lambda = 6 : A - 6I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

Et mulige valg av P og D er da

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}}, \qquad \underline{\underline{D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}}.$$

b)

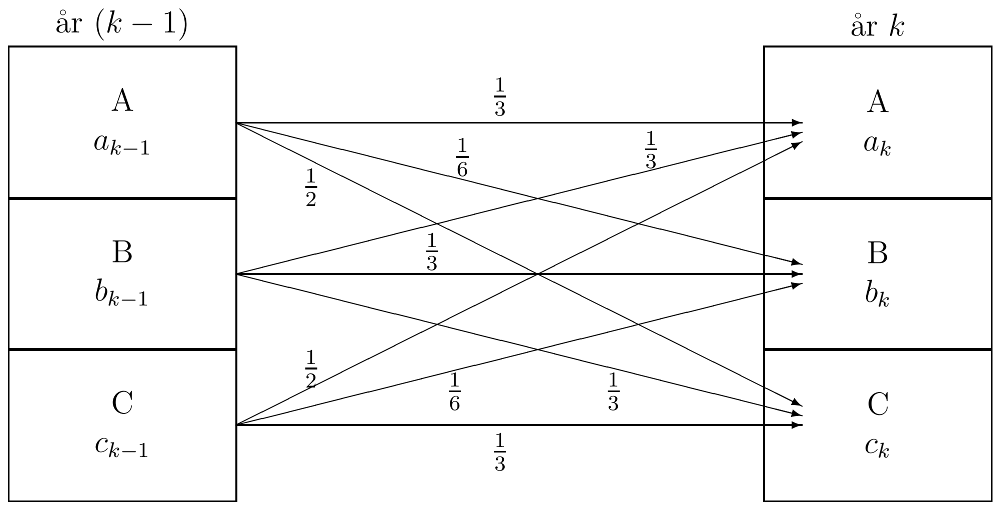
$$\underline{\underline{\mathbf{y} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

c) Vi får

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1}, \qquad \text{dvs.} \qquad \underline{\underline{M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}} = \frac{1}{6} A,$$

ut fra de gitte data som også gir at $\frac{1}{3}$ av fuglene i hvert tilfelle returnerer til samme område som året før:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{3} a_{k-1} + \frac{1}{3} b_{k-1} + \frac{1}{2} c_{k-1} \\ b_k &= \frac{1}{6} a_{k-1} + \frac{1}{3} b_{k-1} + \frac{1}{6} c_{k-1} \\ c_k &= \frac{1}{2} a_{k-1} + \frac{1}{3} b_{k-1} + \frac{1}{3} c_{k-1} \end{aligned}$$



Siden $M = \frac{1}{6}A$, er egenvektorene til M og A de samme, dvs. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer for M, mens egenverdiene til M er $\underline{\underline{\lambda_1 = -\frac{1}{6},\ \lambda_2 = \frac{1}{6} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = 1}}$.

d) Fra $\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$ fås $\mathbf{x}_1 = M\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\lambda_3\mathbf{v}_3$ og formelen for $\mathbf{x}_k$ holder for $k = 1$. Anta at den holder for $k-1$, $k \geq 2$, da får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= M\mathbf{x}_{k-1} \\ &= M(\alpha_1\lambda_1^{k-1}\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^{k-1}\mathbf{v}_2 + \alpha_3\lambda_3^{k-1}\mathbf{v}_3) \\ &= \alpha_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \alpha_3\lambda_3^k\mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

og formelen holder for k. Ved induksjon holder da formelen for alle $k = 1, 2, 3 \ldots$.

Vi får

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{6}\right)^k \mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \to \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

når $k \to \infty$. Her er $2\alpha_3 + \alpha_3 + 2\alpha_3 = 5000$, så $\alpha_3 = 1000$, og fordelingen på lang sikt blir $\underline{\underline{A : 2000,\ B : 1000,\ C : 2000.}}$