Løsningsforslag
Eksamen SIF5010, mai 2002

Oppgave 1

(i) Gjør om til polar form: $z = re^{i\theta}$ og $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2} = Re^{i\phi}$, der

$$R = |\frac{1+i}{2}| = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi = \text{Arg}\,\frac{1+i}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Dette gir likningen $r^3 e^{i3\theta} = 2^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ som gir $r^3 = 2^{-1/2}$ og $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ for $k = 0, 1, 2$. Dvs vi har de tre løsningene

$$z_k = 2^{-\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(ii) Husk at $|z|^2 = z\bar{z}$ slik at likningen kan skrives $(a - z)\bar{z} = 0$. Løsningene blir dermed $z_1 = a$ og $z_2 = 0$.

Oppgave 2

a) Den karakteristiske ligningen $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ har $\lambda = -1/2$ som dobbelrot. Generell løsning blir da $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$. Initialverdiene gir $C_1 = 1$ og $C_2 = -1/2$, slik at løsningen blir

$$y = (1 - \frac{1}{2}x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

b) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 1 = 0$ har $\pm i$ som røtter, så $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Siden høyresiden er en løsning av den homogene likningen, setter vi $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$, som innsatt i likningne gir $A = -1/2$ og $B = 0$. Generell løsning blir da

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

c) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ har $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$ som løsninger, så $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$, der $y_1 = e^x$ og $y_2 = e^{2x}$. For å finne y_p bruker vi variasjon av parametere, dvs. y_p har formen

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx,$$

der $r(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ og $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{3x}$. De to integralene er hhv.

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \underset{v=1+e^x}{=} \int \frac{1}{v} dv = \ln(1+e^x),$$
$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x}) dx = x - \ln(1+e^x),$$

slik at $y_p = -e^x \ln(1+e^x) + e^{2x}(x - \ln(1+e^x))$. Generell løsning er da

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^x \ln(1+e^x) + e^{2x}(x - \ln(1+e^x)).$$

Oppgave 3

a) Divider med $x(1+x^n)$ slik at likningen blir

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{n x^{n-2}}{1+x^n}, \quad x > 0.$$

Likningen har integrerende faktor $e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$ slik at

$$(xy)' = \frac{n x^{n-1}}{1+x^n}, \quad \text{som gir}$$
$$xy = \int \frac{n x^{n-1}}{1+x^n} dx \underset{v=1+x^n}{=} \int \frac{1}{v} dv = \ln(1+x^n) + C.$$

Initialbetingelsen gir $C = -\ln 2$ slik at løsningen blir

$$y = \frac{1}{x} \left(\ln(1+x^n) - \ln 2 \right), \quad x > 0.$$

b) Eulers metode med $n = 2$, $h = 1/2$:

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = 1 + (k+1)\frac{1}{2},$$
$$y_0 = 0, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left(-\frac{y_k}{x_k} + \frac{2}{1+x_k^2} \right),$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dette gir da

$$(x_1, y_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), \quad (x_2, y_2) = (2, \frac{25}{39}), \quad (x_3, y_3) = (\frac{5}{2}, \frac{177}{260}).$$

Dvs at $y(5/2) \approx \frac{177}{260} \approx 0,6808$.

Oppgave 4

a) Gausseliminasjon gir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tilbakesubstitusjon gir da følgende løsing $\mathbf{x}$ av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

En basis for $Null(A)$ er da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Basis for:

$$Col(A): \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Row(A): \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Row(A)^\perp = Null(A): \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

c) Dimensjon = antall basiselementer, dvs $\dim Col(A) = 2$, $\dim Row(A) = 2$ og $\dim Row(A)^\perp = 3$.

Hvis V underrom av $\mathbb{R}^n$, da er $\dim V + \dim V^\perp = n$. Siden kolonnene i A har 4 elementer, er $Col(A)$ et underrom av $\mathbb{R}^4$. Formelen over gir da

$$\dim Col(A)^\perp = 4 - \dim Col(A) = 2.$$

Oppgave 5
Må vise at $(PQ)^T = (PQ)^{-1}$:

$$(PQ)^T = Q^T P^T \underset{P,Q \text{ ortogonale}}{=} Q^{-1}P^{-1} = (PQ)^{-1}.$$

Oppgave 6

a) $\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+b & -b \\ 0 & -b & a+b \end{vmatrix} = a^2(a+2b)$. A inverterbar hvis og bare hvis $\det A \neq 0$, dvs når $a \neq 0$ og $a \neq -2b$.

Gausseliminasjon gir

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right],$$

og dermed er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Siden C er symmetrisk ($C^T = C$) er C (ortogonal) diagonaliserbar.

c) Obs: Matrisen i denne oppgaven er lik $C = A^{-1}B$ fra oppgave b).
$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-9)$ som gir egenverdiene $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 9$.

Siden $C(1,1,1) = (0,0,0)$ er $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ egenvektor for $\lambda_1 = 0$.

$\underline{\lambda_2 = 1}$: $C - I = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tilbakesubstitusjon gir da at $(C - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsning $\mathbf{x} = t(0,1,-1)$ for $t \in \mathbb{R}$, og egenvektoren kan da velges

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_3 = 9}$: $C - 9I = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, som gir følgende egenvektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) Med $L = L_0 = 1$, $R = 3$, $E(t) = 0$ blir systemet

$$A \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix},$$

der A er matrisa fra a) med $a = b = 1$ og B er matrisa fra b). Venstremultipliser likningen med A^{-1} slik at systemet blir

$$\mathbf{I}' = C\mathbf{I}, \quad \text{der} \quad C = A^{-1}B.$$

Substitusjon av $\mathbf{I} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ gir

$$\lambda \mathbf{v} = C\mathbf{v}.$$

Dette egenverdiproblemet ble løst i oppgave c). Vi har altså følgende løsninger:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t},$$

der $\mathbf{v}_i, \lambda_i (i = 1, 2, 3)$ er gitt i c). Siden egenvektorene $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, 3)$ er lineært uavhengige, og siden vi har et 3×3 system, vil $\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$ være en basis av løsninger. Generell løsning blir da

$$y = C_1\mathbf{I}_1 + C_2\mathbf{I}_2 + C_3\mathbf{I}_3 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + C_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t}.$$

(Husk: Egenvektorer tilhørende distinkte egenverdier er lineært uavhengige.)

Viser at $\mathbf{I}_p = \mathbf{a}e^{-t}$ er en partikulær/spesiell løsning av systemet når $E(t) = e^{-t}$ ved insetting i likningnene:

$$A\mathbf{I}_p' = B\mathbf{I}_p + (1,0,0)e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I}_p' = C\mathbf{I}_p + A^{-1}(1,0,0)e^{-t}$$

dvs

$$(C+I)\mathbf{a} = -A^{-1}(1,0,0).$$

Siden $\lambda = -1$ ikke er en egenvektor til C, er $\det(C+I) \neq 0$, og dermed er $(C+I)$ inverterbar. Altså løser $\mathbf{I}_p$ systmet når

$$\mathbf{a} = -(C+I)^{-1}A^{-1}(1,0,0).$$

(Alternativt: Regn ut verdiene av $\mathbf{a}$ ved Gausseliminasjon.)