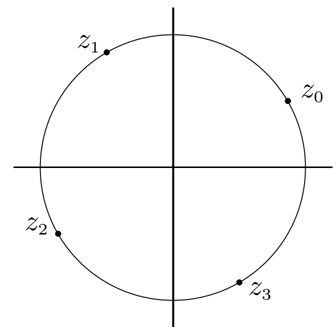
TMA4110 MATEMATIKK 3
Tirsdag 2. desember 2003
løsningsforslag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1 Vi setter $w = 1 + i\sqrt{3}$. Dette tallet har lengde $|w| = \sqrt{1+3} = 2$, og og argument θ, der $\tan\theta = \sqrt{3}$, og siden w ligger i første kvadrant må θ ha en av verdiene $\theta = \pi/3 + 2k\pi$ for heltallige k. Videre ser vi at $z^4 = w/\overline{w}$ har lengde 1 og argument 2θ. Derfor har løsningene også lengde 1, og løsningsmengden er $\{z \mid z^4 = w/\overline{w}\} = \{e^{\pi i/6}, e^{2\pi i/3}, e^{-5\pi i/6}, e^{-\pi i/3}\}$.



2 **a)** For den første ordens differensialligningen $y' = f(x, y)$ med initialverdi $y(x_0) = y_0$, gir Eulers metode oss to sekvenser av verdier $y_0, y_1, y_2, \ldots$ og $x_0, x_1, x_2, \ldots$, der $x_{k+1} = x_k + h$ og $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

I denne oppgaven er $f(x, y) = e^{-x^2} - 2xy$, og vi får

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 & x_0 &= 0, \\ y_1 &= 1 + 0.5(e^0 - 0) = 1.5 & x_1 &= 0.5, \\ y_2 &= 1.5 + 0.5(e^{-(0.5)^2} - 2 \cdot 0.5 \cdot 1.5) \approx 1.1394 & x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Med denne skrittlengden får vi en tilnærming til $y(1)$ som er $y_2 = 1.1394$.

b) Den lineære ligningen $y' + p(x)y = r(x)$ kan løses eksakt som følger. Dersom $P(x)$ er slik at $P'(x) = p(x)$ og $P(x_0) = 0$, så er $y(x) = u(x)e^{-P(x)}$, der $u'(x) = r(x)e^{P(x)}$. Denne løsningen tilfredsstiller initialbetingelsen $y(x_0) = u(x_0)$.

I denne oppgaven blir $P(x) = x^2$ og $u(x) = x + 1$, så $y(x) = (x + 1)e^{-x^2}$. Den eksakte verdien er altså $y(1) = 2e^{-1} \approx 0.7358$. Skrittlengden $h = 1/2$ er alt for stor til at Eulers metode skal gi en god approksimasjon.

For de som foretrekker å bruke en integrerende faktor, så kan det bemerkes at $\mu(x) = e^{x^2}$ er en integrerende faktor og at differensialligningen er ekvivalent med ligningen $(\mu(x)y)' = \mu(x)e^{-x^2} = 1$, som viser at $(\mu(x)y) = x + C$. Initialbetingelsen er tilfredsstilt når $C = 1$, og da er $y(x) = (x + 1)e^{-x^2}$ som før.

$\boxed{3}$ **a)** Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2-3\lambda+2=0$. Vi finner to røtter, $\lambda=1$ og $\lambda=2$.

Siden hverken 0 eller -1 er røtter i den karakteristiske ligningen vil en partikulærløsning være av formen $y_p=A+Be^{-x}$. Innsetting gir $y_p''-3y_p'+2y_p=2A+6Be^{-x}$. Den generelle løsningen er derfor $y=Ae^x+Be^{2x}+1+e^{-x}$.

Vi finner at $y'=Ae^x+2Be^{2x}-e^{-x}$. Initialbetingelsene gir oss de to ligningene $y(0)=A+B+2=0$ og $y'(0)=A+2B-1=0$. Altså er $A=-5$ og $B=3$, så løsningen er $y=-5e^x+3e^{2x}+1+e^{-x}$.

b) Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2-1=0$, som har røtter $\lambda=1$ og $\lambda=-1$. Siden -1 er rot i den karakteristiske ligningen, er en partikulær løsning av formen $y_p=Cxe^{-x}$. Innsetting gir $y_p''-y_p=-2Ce^{-x}$. Vi må altså ha $C=-1/2$, så den generelle løsningen er $y_p=Ae^x+(B-x/2)e^{-x}$.

c) Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2-2\lambda+1=0$, som har en dobbel rot, $\lambda=1$. Det vil si at funksjonene $y_1(x)=e^x$ og $y_2(x)=xe^x$ danner en basis for alle løsningene av den homogene ligningen. Ved å bruke metoden med variasjon av koeffisientene kan vi skrive løsningene av den inhomogene ligningen som $y=u_1y_1+u_2y_2$, der u_1' og u_2' tilfredsstiller ligningene

$$\begin{aligned} u_1'y_1+u_2'y_2&=0,\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'&=\frac{e^x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Vi kan dele med e^x og da får vi ligningene

$$\begin{aligned} u_1'+u_2'x&=0,\\ u_1'+u_2'(x+1)&=\frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

som viser at $u_1'=-x/\cos^2 x$, og $u_2'=1/\cos^2 x$. Fra Rottmann side 143-144 formel 106 og 126 finner vi $u_1=-x\tan x-\ln\cos x+A$ og $u_2=\tan x+B$. Den generelle løsningen er altså $y=(-x\tan x-\ln\cos x+A)e^x+(\tan x+B)xe^x=(-\ln\cos x+A+Bx)e^x$.

$\boxed{4}$ **a)** Siden en kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke forsvinner, så regner vi ut $\det A$. Det kan vi f. eks. gjøre ved å utvikle etter siste rad.

$$\det A=1\cdot(2\cdot 0-1\cdot a)+1\cdot(a\cdot a-2\cdot 1)=a^2-a-2=(a-2)(a+1).$$

Matrisen A er inverterbar når $a\notin\{-1,2\}$

b) Ved å utføre Gausseliminasjon på tilleggsmatrisen til systemet får vi

$$\begin{bmatrix}2&2&1&1+t\\1&2&0&2+t\\1&0&1&3+t\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&3+t\\1&2&0&2+t\\2&2&1&1+t\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&3+t\\0&2&-1&-1\\0&2&-1&-5-t\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&3+t\\0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&4+t\end{bmatrix}$$

Dette viser at systemet har løsning hvis og bare hvis $t=-4$.

c) Vi benytter Gauss-Jordaneliminasjon til å finne den reduserte echelonformen som er radekvivalent med matrisen.

$$\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

En basis for nullrommet kan f. eks. bestå av vektoren $[1,1,-1]^T$.

$\boxed{5}$ **a)** La A være matrisen som har vektorene $\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \ldots, \mathbf{v}_5^T$ som rader. Vi har at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setter vi $\mathbf{y}_1 = [1, 0, 1]^T$, $\mathbf{y}_2 = [0, 1, -1]^T$ og $\mathbf{z} = [-1, 1, 1]^T$, er

$V = \text{span}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ og $V^\perp = \text{Null}(A) = \text{span}\{\mathbf{z}\}$.

b) Ved å bruke Gram Schmidt's ortogonaliseringsalgoritme får vi en ortogonal basis for V.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_2 - \frac{\mathbf{u}_1{}^T\mathbf{y}_2}{\mathbf{u}_1{}^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på V er

$$\mathbf{b_1} = \frac{\mathbf{u}_1{}^T\mathbf{b}}{\mathbf{u}_1{}^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2{}^T\mathbf{b}}{\mathbf{u}_2{}^T\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dersom vi kaller projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på $V^\perp$ for $\mathbf{b_2}$, har vi

$$\mathbf{b_2} = \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{b}}{\mathbf{z}^T\mathbf{z}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi finner igjen $\mathbf{b_1} = \mathbf{b} - \mathbf{b_2}$.

c) Dersom $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0}$, så er $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{v} \cdot (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \alpha|\mathbf{v}|^2$. Tallet $|\mathbf{v}|^2 \neq 0$ siden $\mathbf{v}$ ikke er nullvektoren, så vi må ha $\alpha = 0$.

Ved å ta indreprodukt med $\mathbf{w}$, kan vi på samme måte konkludere med at $\beta = 0$. Dette viser at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige.

6 For å beregne egenunderrommene tilhørende de forskjellige egenverdiene λ, så løser vi de homogene ligningsystemene $(A-\lambda I)=0$, for $\lambda \in \{2,4\}$.

$\lambda = 2$.

$$A-2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for egenunderrommet tilhørende egenverdien $\lambda = 2$ er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, der $\mathbf{v}_1 = [-1,1,0]^T$ og $\mathbf{v}_2 = [1,0,1]^T$.

$\lambda = 4$.

$$A-4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for egenunderrommet tilhørende egenverdien $\lambda = 4$ er $\{\mathbf{v}_3\}$, der $\mathbf{v}_3 = [1,1,0]^T$. Den generelle løsningen er

$$[x,y,z]^T = e^{2t}(A\mathbf{v}_1 + B\mathbf{v}_2) + e^{4t}C\mathbf{v}_3.$$

For å finne løsningen på initialverdiproblemet må vi bestemme koeffisientene A, B og C slik at $A\mathbf{v}_1 + B\mathbf{v}_2 + C\mathbf{v}_3 = [1,2,1]^T$, som er det samme som

$$\begin{aligned} -A + B + C &= 1 \\ A \qquad + C &= 2 \\ B \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Vi ser at $A = B = C = 1$, så løsningen er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{2t} + e^{4t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

7 Dersom vi antar at saltkonsentrasjonene er tilnærmet konstante og lik henholdsvis $(x_1(t)/100)g/\ell$ og $(x_2(t)/50)g/\ell$ i et lite tidsintervall mellom t og $t+\Delta t$ sekunder, får vi ligningene

$$\begin{aligned} x_1(t+\Delta t) - x_1(t) &= -\frac{x_1(t)}{100}\,3\,\Delta t \\ x_2(t+\Delta t) - x_2(t) &= \left(\frac{x_1(t)}{100} - \frac{x_2(t)}{50}\right)\Delta t \end{aligned}$$

Når vi går til grensen $\Delta t \to 0$, får vi differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{3}{100}x_1 \\ \dot{x}_2 &= \quad \frac{1}{100}x_1 - \frac{2}{100}x_2 \end{aligned}$$

Egenverdiene til matrisen $\frac{1}{100}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ er henholdsvis $-3/100$ og $-2/100$, med tilhørende egenvektorer $[1,-1]^T$ og $[0,1]^T$. Den generelle løsningen er derfor

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{3}{100}t}\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} + e^{-\frac{2}{100}t}\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

For å tilfredsstille initialbetingelsene ser vi at vi må ha $A = 100$ og $B = 200$, så løsningen er

$$x_1(t) = 100e^{-\frac{3}{100}t} \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = 100(2e^{-\frac{2}{100}t} - e^{-\frac{3}{100}t}).$$