TMA4110 Matematikk 3
eksamen 20. desember 2006

Løsningsforslag

1 Vi skriver først ligningens høyreside på polarform:

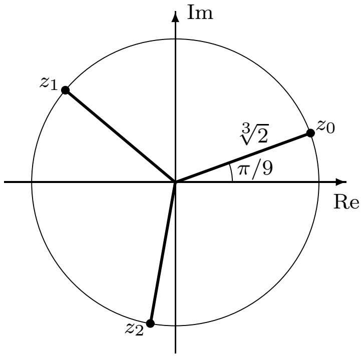
$$\frac{4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}.$$

Da kan ligningen skrives $z^3 = 2e^{i\pi/3}$, og løsningene er gitt ved

$$z_k = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\pi/3+2k\pi)/3}, \quad k = 0,1,2,$$

altså

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\pi/9)}$$
$$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i(7\pi/9)}$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i(13\pi/9)}.$$



2 **a)** Karakteristisk ligning for differensialligningen $y'' - y' + 2.5y = 0$ er $\lambda^2 - \lambda + 2.5 = 0$ med røtter $\lambda = (1 \pm 3i)/2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Generell løsning av differensialligningen er følgelig

$$y = c_1 e^{x/2} \cos\frac{3x}{2} + c_2 e^{x/2} \sin\frac{3x}{2}.$$

b) I differensialligningen $y'' + y' - 2y = x + e^{-2x}$ har den homogene ligningen karakteristisk ligning $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ med røtter $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -2$. Den homogene ligningen har da generell løsning

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Ifølge ubestemte koeffisienters metode har den inhomogene ligningen en partikulær løsning av formen

$$y_p = x \cdot Ae^{-2x} + Bx + C.$$

Da er $y_p'' + y_p' - 2y_p = -3Ae^{-2x} - 2Bx + B - 2C$, og y_p er løsning hvis $-3A = 1$, $-2B = 1$ og $B - 2C = 0$. Det gir $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$ og $C = -\frac{1}{4}$. En partikulær løsning er følgelig $y_p = -\frac{1}{3}xe^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, og generell løsning blir

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{3}xe^{-2x} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

c) Differensialligningen $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$ er en Cauchy–Eulerligning, og vi finner løsningen ved å sette inn $y = x^m$:

$$4x^2\,(x^m)'' + 8x\,(x^m)' - 3\,(x^m) = x^m\,[4m(m-1) + 8m - 3] = x^m\left[4m^2 + 4m - 3\right] = 0.$$

Hvis $y = x^m$ skal være løsning, må vi ha $4m^2 + 4m - 3 = 0$. Det gir $m = (-4 \pm 8)/8$, dvs. $m_1 = \frac{1}{2}$ og $m_2 = -\frac{3}{2}$. Generell løsning blir da

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-3/2}, \quad x > 0.$$

3 Wronskideterminanten $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ til to løsninger av $y'' + ay' + by = 0$ er enten lik null for alle x eller forskjellig fra null for alle x. Siden $W = 0$ for $x = 0$, er $W = 0$ for alle x, og følgelig er det svaralternativ **A** som riktig.

En vektor $\mathbf{v}$ er i nullrommet til A hvis $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ved å multiplisere A med hver av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$, får vi

$$A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-2\\6\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-6\\2\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}-2\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Siden $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, er $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Null}(A)$, og riktig svar er følgelig alternativ **C**.

4 I hvert veikryss er det like mange biler som kjører inn i krysset som ut av krysset. Det gir

$$\begin{aligned} x_1 + 470 &= 440 + x_2 \\ x_2 + 450 &= 550 + x_3 \\ x_3 + 380 &= 430 + x_4 \\ x_4 + 540 &= 420 + x_1. \end{aligned}$$

På formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ blir ligningssystemet

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-30\\100\\50\\-120\end{bmatrix}.$$

Adderer vi de tre første ligningene til den siste, får vi en ligning med bare nuller. Følgelig har ligningssystemet uendelig mange løsninger siden de 3 første ligningene allerede er på echelonform. Med $x_4 = t$ som fri variabel får vi generell løsning

$$x_1 = 120 + t, \quad x_2 = 150 + t, \quad x_3 = 50 + t, \quad x_4 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hvis $x_4 = 0$ så er $t = 0$, og vi får $x_1 = 120$, $x_2 = 150$ og $x_3 = 50$.

5 **a)** Vi finner basis for $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)$ ved først å omforme A til en echelonmatrise E:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1\\2 & 2 & -1 & 0 & 1\\-1 & -1 & 2 & -3 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[(1)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1\\0 & 0 & 3 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{3})R_3]{(-\frac{1}{3})R_2+R_4} \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1\\0 & 0 & 3 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_3+R_4]{(\frac{1}{3})R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E.$$

En basis for $\mathrm{Row}(A)$ er ikkenullradene i E:

$$(1, 1, -2, 0, -1),\ (0, 0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 0, 1, 0),$$

og en basis for $\mathrm{Col}(A)$ er kolonnene i A som tilsvarer pivotkolonnene i E:

$$(1, 2, -1, 0),\ (-2, -1, 2, 1),\ (0, 0, -3, 1).$$

b) Dimensjonen er antall vektorer i en basis. Følgelig er

$$\dim \mathrm{Row}(A) = 3 \quad \text{og} \quad \dim \mathrm{Col}(A) = 3 \qquad \big(\text{kontroll: } \dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)\big).$$

Hvis, generelt, V er et underrom i $\mathbb{R}^n$, så er $\dim V + \dim V^{\perp} = n$. Her er $\mathrm{Row}(A)$ underrom i $\mathbb{R}^5$, og vi får

$$\dim \mathrm{Row}(A)^{\perp} = 5 - \dim \mathrm{Row}(A) = 2.$$

c) Vektoren $\mathbf{u} = (3, -1, 1, 3)$ er i det ortogonale komplementet $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ siden den er ortogonal til alle vektorene i basisen for $\mathrm{Col}(A)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (1, 2, -1, 0) &= 3 - 2 - 1 = 0 \\
\mathbf{u} \cdot (-2, -1, 2, 1) &= -6 + 1 + 2 + 3 = 0 \\
\mathbf{u} \cdot (0, 0, -3, 1) &= -3 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Siden $\dim \mathrm{Col}(A)^{\perp} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Col}(A) = 1$, er $\{\mathbf{u}\}$ en basis for $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$. Følgelig er $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ utspent av $\mathbf{u}$.

Alternativt kan vi løse ligningssystemet $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og vise at løsningene er gitt ved $\mathbf{x} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$. Siden $\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(A^T)$, følger at $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ er utspent av $\mathbf{u}$.

Et inhomogent system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$ eller, ekvivalent, $\mathbf{b}$ er ortogonal til $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$. For at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skal ha løsning, må altså $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ oppfylle betingelsen $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$, det vil si

$$3b_1 - b_2 + b_3 + 3b_4 = 0.$$

6 **a)** Egenverdiene til A er røttene i den karakteristiske ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Her er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

og egenverdiene er følgelig $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorene som tilhører $\lambda_1 = 4$, henholdsvis $\lambda_2 = -1$, er de ikketrivielle løsningene av systemene

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{henholdsvis} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ er en egenvektor assosiert med $\lambda_1 = 4$ og at $\mathbf{v}_2 = (-1, 2)$ er en egenvektor assosiert med $\lambda_2 = -1$. Normerte egenvektorer er $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2/|\mathbf{v}_2|$, og vi får en ortogonal matrise

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

som oppfyller $|P| = 1$ og $P^TAP = D$ der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Setter vi $\mathbf{x} = (x, y)$, kan ligningen for kjeglesnittet skrives $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = 1$. Vi innfører nye koordinater x', y' ved

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \quad \text{det vil si} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

slik at x'-aksen er bestemt av $\mathbf{u}_1$, og y'-aksen er bestemt av $\mathbf{u}_2$. Siden

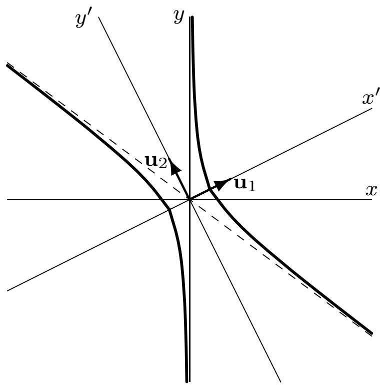
$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T P^T A P\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T D\mathbf{x}' = 4(x')^2 - (y')^2,$$

er ligningen for kjeglesnittet i $x'y'$-koordinater gitt ved

$$4(x')^2 - (y')^2 = 1.$$

Kjeglesnittet er altså en hyperbel som skjærer x'-aksen i $\pm\frac{1}{2}$ og som har asymptoter med ligning $y' = \pm 2x'$. Grafen er vist på figuren.

(Som kontroll har vi at ifølge den gitte ligningen vil kjeglesnittet skjære x-aksen når $3x^2 = 1$, det vil si for $x \approx \pm 0.6$.)



$\boxed{7}$ Hvis 5 er en egenverdi for A, så fins vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ slik at $A\mathbf{u} = 5\mathbf{u}$. Da er

$$(A - 2I)\mathbf{u} = A\mathbf{u} - 2I\mathbf{u} = 5\mathbf{u} - 2\mathbf{u} = 3\mathbf{u}.$$

Siden $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, viser dette at 3 er en egenverdi for matrisen $A - 2I$.

Vi skal også vise at vektorene $\mathbf{v}$ og $A\mathbf{v}$ er lineært uavhengige hvis $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $A^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi betrakter ligningen

$$c_1\mathbf{v} + c_2 A\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

og multipliserer fra venstre med A. Det gir $c_1 A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ siden $A^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Siden $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ følger at $c_1 = 0$. Setter vi inn $c_1 = 0$ i ligningen, får vi $c_2 A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ som gir $c_2 = 0$, igjen siden $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Følgelig er $c_1 = c_2 = 0$ eneste løsning, og vektorene $\mathbf{v}$ og $A\mathbf{v}$ er lineært uavhengige.