# Løsningsforslag for eksamen i TMA4110, Matematikk 3,

# 4. desember 2008.

**Oppgave 1**

Vi har

$$\frac{5+i2\sqrt{5}}{2-i\sqrt{5}} = \frac{\left(5+i2\sqrt{5}\right)\left(2+i\sqrt{5}\right)}{\left(2-i\sqrt{5}\right)\left(2+i\sqrt{5}\right)} = \frac{i9\sqrt{5}}{9} = i\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}+i2\pi n}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Dette gir

$$z^3 = 5^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}+i2\pi n} \;\Leftrightarrow\; z = 5^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{2\pi}{3}n} .$$

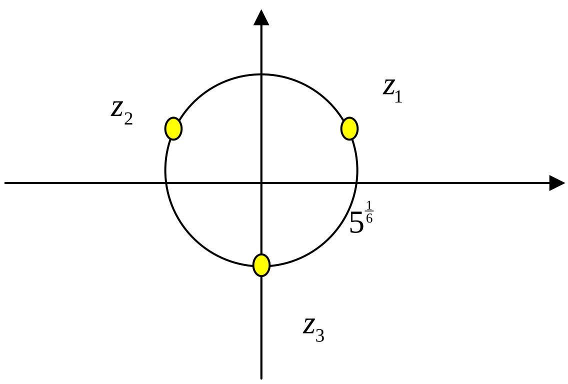
De tre løsningene blir da:

$$n=0: \; z_1 = 5^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}} = 5^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{5^{\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{2}}}{2}+i\frac{5^{\frac{1}{6}}}{2}$$

$$n=1: \; z_2 = 5^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 5^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -\frac{5^{\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{2}}}{2}+i\frac{5^{\frac{1}{6}}}{2}$$

$$n=2: \; z_3 = 5^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i5^{\frac{1}{6}} .$$

Plassering i det komplekse plan:




**Oppgave 2**

**a)**

Vi har karakteristisk ligning $r^2 - 6r + 13 = 0 \Leftrightarrow r = 3 \pm 2i$. Dette gir generell løsning

$y(x) = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$. Bruker $y(0) = 1$ som gir $C_1 = 1$. Altså er

$y'(x) = 3e^{3x}\left(\cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{3x}\left(-2\sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right)$. $y'(0) = 1$ gir da $C_2 = -1$.

Løsningen på initialverdiproblemet er altså

$$y(x)=e^{3x}\left(\cos 2x-\sin 2x\right).$$

**b)**
Tilhørende homogene ligning (THL) har karakteristisk ligning
$r^2-r-2=0 \Leftrightarrow (r-2)(r+1)=0$. Altså er

$$y_H(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

Siden høyre side av den inhomogene ligninga er løsning på THL må vi modifisere $y_p(x)$ og sette $y_p(x)=Axe^{-x}$. Innsatt i ligninga gir dette $A=-\frac{1}{3}$. Generell løsning er da

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\tfrac{1}{3}xe^{-x}.$$

**c)**
THL $y''-\frac{4}{x}y'+\frac{6}{x^2}y=0$ er en Cauchy-Euler ligning som kan skrives som $x^2y''-4xy'+6y=0$. Løser da $Y''-5Y'+6Y=0$ som gir $Y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$. Vi har $y_H(x)=Y(\ln x)=C_1x^2+C_2x^3$. La $y_1(x)=x^2$ og $y_2(x)=x^3$, og bruk variasjon av parametre for å finne $y_p(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$. Dette gir ligningsystemet

$\begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ med løsning $C_1'=-1$ og $C_2'=\frac{1}{x}$. Altså er $C_1=-x$ og $C_2=\ln x$. Dette gir generell løsning

$$y(x)=y_H(x)+y_p(x)=C_1x^2+C_2x^3-x^3+x^3\ln x=C_1x^2+\tilde{C}_2x^3+x^3\ln x.$$

**Oppgave 3**
**a)**
Totalmatrisa blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 5 & 1 & 9 & 13 \end{bmatrix} \text{ som er rad-ekvivalent til } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir løsning

$$x=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+u\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ t,s,u\in R$$

**b)**

Matrisa her er den samme som koeffisientmatrisa i a). Altså er en basis for $Null(A)$ gitt ved (siden løsninga i a) er $x = x_p + x_H$, der $x_H$ er løsning på den homogene ligninga)

$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, basis for $Row(A)$ leser vi av trappeformen som

er $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, mens

første og fjerde søyle i trappeformen har ledende element. D.v.s. første og fjerde søyle i $A$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en basis for $Col(A)$.

**c)**

La $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Da er $Col(A) = Col(C)$. Den ortogonale projeksjonen av $b$ inn i $Col(C)$ er gitt ved $p = C\overline{x}$, der $\overline{x}$ er løsninga på normalligninga $C^T C\overline{x} = C^T b$. Vi har

$C^T C = \begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ og $C^T b = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dette gir $\overline{x} = \begin{bmatrix} \frac{16}{11} \\ -\frac{45}{11} \end{bmatrix}$. Altså er

$$p = C\overline{x} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 4**

Vi har

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0 \Leftrightarrow c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_1 + v_2 + v_3) + c_3(v_1 - v_2) = 0.$$

Dette gir

$$(c_1 + c_2 + c_3)v_1 + (c_1 + c_2 - c_3)v_2 + c_2 v_3 = 0.$$

Siden $v_1, v_2, v_3$ er lineært uavhengige er $c_1 + c_2 + c_3 = 0,\ c_1 + c_2 - c_3 = 0,\ c_2 = 0$. Dette gir $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Altså er $w_1, w_2, w_3$ lineært uavhengige.

**Oppgave 5**

**a)**
Finner egenverdiene til $A$: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-16\lambda+60=0 \Leftrightarrow (\lambda-6)(\lambda-10)=0$.
Egenvektorer: $\lambda_1=6$ gir $A-6I$ som er rad-ekvivalent til $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ som gir
egenvektorer $x=t\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, t\neq 0$. $\lambda_2=10$ gir $A-10I$ som er radekvivalent til $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
Dette gir egenvektorer $x=t\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}, t\neq 0$.

Hvis $Ax=\lambda x$, er $kAx=(k\lambda)x$. Altså har $kA$ egenverdiene $6k$ og $10k$ med samme egenvektorer som $A$.

**b)**
La $x_n$ være andelen biler med tohjulstrekk og $y_n$ andelen biler med firehjulstrekk etter $n$ år. Da er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.7x_n+0.1y_n \\ y_{n+1} &= 0.3x_n+0.9y_n. \end{aligned}$$

På matriseform:

$$X_{n+1}=BX_n=\tfrac{1}{10}AX_n,$$

der $A$ er matrisa i 5a) og $X_n=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$ Dette gir $X_n=B^nX_0$, der $X_0=\begin{bmatrix}0.75\\ 0.25\end{bmatrix}$. Vi har

$B=PDP^{-1}$ og $B^n=PD^nP^{-1}$, der $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0.6 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Vi har
da $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, som gir

$$X_n=PD^nP^{-1}X_0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(0.6)^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.75\\ 0.25\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}4+8(0.6)^n\\ 12-8(0.6)^n\end{bmatrix}.$$

Altså er

$$y_{10}=\frac{12-8(0.6)^{10}}{16}\approx 0.747.$$

D.v.s. 74.7% av bileierne har firehjulstrekk om 10 år.

**Oppgave 6**

Vi har

$$8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x^T A x = 20\,,$$

der

$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$ og $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Finner egenverdiene til $A$:

$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; (8-\lambda)(17-\lambda) - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 20)(\lambda - 5) = 0$, som gir $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 5$.

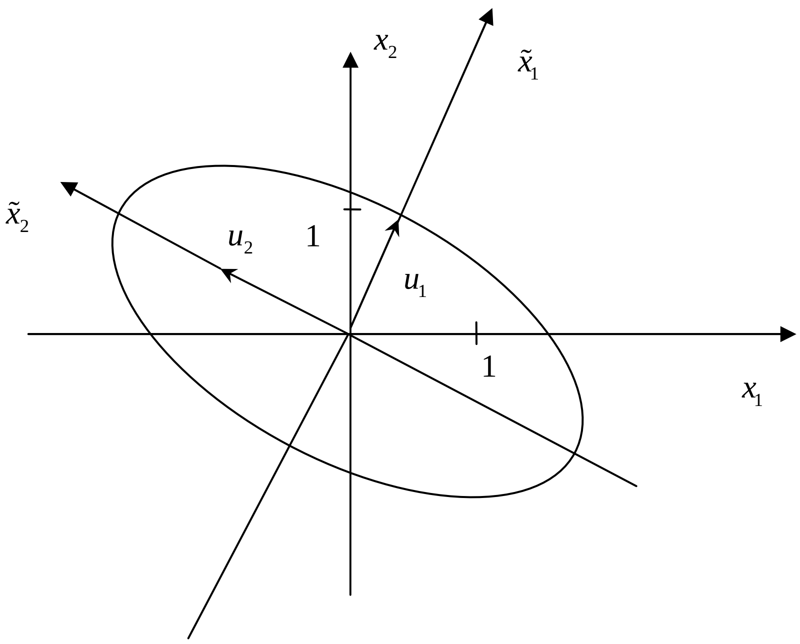
Egenvektorer: $\lambda_1 = 20$ gir $A - 20I = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, radekvivalent til $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Egenvektorer er $x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, t \neq 0$, der $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har enhets lengde.

$\lambda_2 = 5$ gir $A - 5I = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, radekvivalent til $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, som gir egenvektorer $x = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ har enhets lengde (og står, som den skal, ortogonalt på $u_1$). La $u_1$ og $u_2$ bestemme nye koordinatakser med tilhørende koordinater $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. Ligninga for kurva i dette koordinatsystemet er da

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 = 20 \;\Leftrightarrow\; 20\tilde{x}_1^2 + 5\tilde{x}_2^2 = 20 \;\Leftrightarrow\; \frac{\tilde{x}_1^2}{1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{2^2} = 1\,.$$

Dette er ligninga for en ellipse som har halvakser med lengde 1 og 2.




**Oppgave 7**

La $Ax = \lambda x$. Da er $A(Bx) = ABx = BAx = B\lambda x = \lambda(Bx)$. Altså er $Bx$ egenvektor for $A$ med egenverdi $\lambda$. Siden egenrommet $E_\lambda$ er 1-dimensjonalt med $x$ som en basis, må $Bx = kx$ for en konstant $k$.