NTNU
Institutt for matematiske fag

# TMA4115 Matematikk 3
# eksamen 11.08.05

**Løsningsforslag**

Eksamenssettet har 12 punkter, 1, 2ab, 3ab, 4ab, 5abcd og 6, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ Vi skal vise "Parallellogramlikheten": $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$. Ved å bruke at $|z|^2 = z\overline{z}$ får vi

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\ &= (z_1+z_2)\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z}_1-\overline{z}_2\right)\\ &= 2\left(z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2\right) = 2\left(|z_1|^2+|z_1|^2\right).\end{aligned}$$

Alternativt kan vi innføre $z_1 = x_1+iy_1$ og $z_2 = x_2+iy_2$. Det gir

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\ &= 2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2) = 2\left(|z_1|^2+|z_1|^2\right).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ **a)** Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ på ligningen $y' = x+y$ er

$$x_{n+1} = x_n+0.1, \quad y_{n+1} = y_n+0.1(x_n+y_n), \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Fra initialbetingelsen $y(0) = 0$ får vi $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Da blir

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1, & y_1 &= 0\\ x_2 &= 0.2, & y_2 &= 0.1(0.1) = 0.01\\ x_3 &= 0.3, & y_3 &= 0.01+0.1(0.2+0.01) = 0.031.\end{aligned}$$

Følgelig er $y(0.3) \approx 0.031$.

**b)** Differensialligningen i **a)** er lineær:

$$y'-y = x.$$

Ved å multiplisere med den integrerende faktoren $F(x) = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x}$ kan ligningen skrives

$$\left(ye^{-x}\right)' = xe^{-x},$$

og ved delvis integrasjon får vi $ye^{-x} = -xe^{-x}-e^{-x}+C$. Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $C = 1$. Følgelig er

$$y = e^x-x-1.$$

Da er $y(0.3) = e^{0.3}-1.3 = 0.050$ (avrundet til 3 desimaler), og differansen mellom den eksakte verdien og den tilnærmede verdien i **a)** er 0.019.

$\boxed{3}$ **a)** Differensialligningen $x^2y''-2xy'+2y = 0$ er en Cauchy-Euler-ligning, og vi finner løsningen ved å sette inn $y = x^m$. På venstresiden får vi

$$x^2\left(x^m\right)''-2x\left(x^m\right)'+2\left(x^m\right) = x^m\left[m(m-1)-2m+2\right] = x^m\left[m^2-3m+2\right].$$

Hvis $y = x^m$ skal være løsning, må vi ha $m^2-3m+2 = 0$ som gir $m = 1$ og $m = 2$. Generell løsning er følgelig

$$y = C_1x+C_2x^2.$$

Av initialbetingelsene $0 = y(1) = C_1 + C_2$ og $1 = y'(1) = C_1 + 2C_2$ får vi $C_1 = -1$ og $C_2 = 1$. Løsningen på initialverdiproblemet blir altså

$$y = x^2 - x.$$

**b)** Den generelle løsningen av $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$ har formen $y = y_h + y_p$. Fra **a)** har vi $y_h = C_1 x + C_2 x^2$, og vi kan bruke metoden med "variasjon av parametrene" for å finne en partikulær løsning på formen $y_p = uy_1 + vy_2 = xu + x^2 v$. Til bestemmelse av $u'$ og $v'$ har vi ligningssystemet $u'y_1 + v'y_2 = 0$, $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$, der $r(x)$ er høyresiden i ligningen når ligningen er på standardform $(y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x))$. Vi får

$$\left.\begin{aligned} xu' + x^2 v' &= 0 \\ u' + 2xv' &= \tfrac{1}{x} \ln x \end{aligned}\right\} \qquad \text{med løsning} \qquad v' = \frac{1}{x^2} \ln x,\ u' = -\frac{1}{x} \ln x.$$

Dermed blir

$$u = -\int \frac{\ln x}{x}\, dx = -\frac{1}{2} (\ln x)^2 \quad \text{og} \quad v = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}(1 + \ln x).$$

der vi substituerte $u = \ln x$ (evt. formel 82 side 141 i Rottmann) i det første integralet og brukte den oppgitte integralformelen i det andre integralet. (I begge integralene er integrasjonskonstanten satt lik 0.) Den generelle løsningen av differensialligningen blir

$$y = y_h + y_p = C_1 x + C_2 x^2 - \frac{1}{2} (\ln x)^2 x - \frac{1}{x}(1 + \ln x)x^2 = C_1 x + C_2 x^2 - \frac{x}{2} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x + 2 \right).$$

Svaret kan også skrives $y = C_1' x + C_2 x^2 - \frac{x}{2} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x \right)$ der $C_1' = C_1 - 1$.

$\boxed{4}$ **a)** Vi løser ligningssystemet ved å omforme koeffisientmatrisen $A$ til echelonform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

Da er $x_1$ og $x_2$ ledervariabler og $x_3$ og $x_4$ følgelig frie variabler. Setter vi $x_3 = s$ og $x_4 = t$, får vi ved tilbakesubstitusjon $x_2 = x_3 = s$ og $x_1 = -x_4 - x_2 = -t - s$. Løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er altså

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t - s, s, s, t) = s(-1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**b)** Basis for

| | | |
|---|---|---|
| $\text{Null}(A)$ : | $\{(-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ | (fra løsningen i **a)**) |
| $\text{Row}(A)$ : | $\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ | (ikkenullradene i $E$) |
| $\text{Col}(A)$ : | $\{(1, 2, 2), (1, 1, 2)\}$ | (kolonnevektorene i $A$ i som tilsvarer pivotkolonnene i $E$) |
| $\text{Col}(A)^\perp$ : | $\{(-2, 0, 1)\}$ | $\big(\text{Col}(A)^\perp = \text{Row}(A^T)^\perp = \text{Null}(A^T)\big)$ |

Her fant vi en basis for $\text{Null}(A^T)$ ved å løse ligningssystemet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. (De to siste ligningene i $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er overflødige.) Løsningene er gitt ved $x_2 = 0$, $x_1 = -2x_3$, og vektoren $(-2, 0, 1)$ er følgelig en basis for løsningsrommet.

Siden $\text{Col}(A)$ har dimensjon 2 og er underrom i $\mathbb{R}^3$, har $\text{Col}(A)^\perp$ dimensjon 1, og vi kunne derfor også funnet en basis for $\text{Col}(A)^\perp$ ved å ta vektorproduktet (kryssproduktet) av de to vektorene i basisen for $\text{Col}(A)$.

$\boxed{5}$ **a)** Vi regner ut $\det A$ ved f.eks. å utvikle etter første rad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a^2-1) - (a-1) + (1-a)$$
$$= a(a+1)(a-1) - 2(a-1) = (a^2+a-2)(a-1).$$

Følgelig er $\det A = 0$ når $a = 1$ og når $a^2 + a - 2 = 0$, $a = 1$ og $a = -2$. Nullpunktet $a = 1$ har altså multiplisitet 2.

**b)** Når $a = 0$, er $\det A \neq 0$ og $A$ følgelig inverterbar. Vi kan finne $A^{-1}$ ved å omforme $\left[A \mid I\right]$ til redusert echelonform ved hjelp av elementære radoperasjoner. Vi bytter først om første og tredje rad i $\left[A \mid I\right]$, og den videre regningen blir

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2,\ (\frac{1}{2})R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Følgelig er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**c)** Et reelt tall $\lambda$ er en egenverdi for $A$ hvis $|A - \lambda I| = 0$. Her er

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{bmatrix},$$

og fra **a)** med $a - \lambda$ istedenfor $a$ har vi at $|A - \lambda I| = 0$ når $a - \lambda = 1$, $\lambda = a - 1$ og $a - \lambda = -2$, $\lambda = a + 2$. Egenverdiene til $A$ er da $\lambda = a - 1$ (dobbel egenverdi) og $\lambda = a + 2$.

For $\lambda = a - 1$: Ligningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får ligningen $x+y+z = 0$, og egenrommet blir 2-dimensjonalt. Med $y = 1$ og $z = 0$ får vi $x = -1$ og egenvektoren $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$. Med $y = 0$ og $z = 1$ får vi $x = -1$ og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$. Egenrommet til $A$ for egenverdien $\lambda = a - 1$ har basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

For $\lambda = a + 2$: Vi omformer koeffisientmatrisen i systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ til echelonform:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den andre ligningen gir $y = z$, og fra første ligning får vi $x = 2z - y = z$. Setter vi $z = 1$, får vi egenvektoren $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$.

**d)** Med $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ kan differensialligningssystemet skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Bruker vi egenvektorene vi fant i **c**), kan generell løsning skrives

$$\mathbf{y} = c_1 e^{(a-1)t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{(a-1)t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{(a+2)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De gitte initialbetingelsene er $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 2$. De er oppfylt dersom $c_1(-1, 1, 0) + c_2(-1, 0, 1) + c_3(1, 1, 1) = (0, 1, 2)$. Vi får et inhomogent ligningssystem

$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad + c_3 &= 1 \\ c_2 + c_3 &= 2. \end{aligned}$$

Ved å addere ligningene får vi $3c_3 = 3$, $c_3 = 1$. Av ligning 2 får vi da $c_1 = 1 - c_3 = 0$, og av ligning 3 får vi $c_2 = 2 - c_3 = 1$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y_1 = -e^{(a-1)t} + e^{(a+2)t}, \qquad y_2 = e^{(a+2)t}, \qquad y_3 = e^{(a-1)t} + e^{(a+2)t}.$$

$\boxed{6}$ La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ være kolonnevektorene til den gitte $m \times n$-matrisen $A$. Da er altså $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, og med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kan ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skrives

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

For en gitt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vil følgelig ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b} \in \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} = \operatorname{Col}(A)$. Vi har $\dim \operatorname{Col}(A) \leq n$. Da $n < m$, er $\operatorname{Col}(A)$ et ekte underrom av $\mathbb{R}^m$. Det finnes derfor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ som ikke er i $\operatorname{Col}(A)$. For slike $\mathbf{b}$ har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning.