TMA4115 Matematikk 3 eksamen 10.08.2006

Løsningsforslag

1 Setter man $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ lik $i|z|^2 = i(x^2+y^2)$ får man følgende to krav på tallene x og y:

$$\text{(i)}\ \ x^2 - y^2 = 0 \quad \text{samt} \quad \text{(ii)}\ \ 2xy = x^2 + y^2.$$

Ligning (i) gir at $x^2 = y^2$, dvs $x = y$ eller $x = -y$. Setter man dette inn i ligning (ii) får man $2xy = 2x^2$, som gir at $x = y$. Konklusjonen blir at alle komplekse tall som oppfyller ligningen $z^2 = i|z|^2$ er på formen $z = x + ix = x(1+i)$, for et vilkårlig reelt tall x.

2 **a)** Differensialligningen med konstante koeffisienter har tilhørende karakteristisk ligning $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, som har løsninger $\lambda = -2 \pm i$. Dermed vet vi at generell løsning er på formen

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))\ , \qquad c_1, c_2 \text{ vilkårlige reelle tall.}$$

Initialbetingelsene (i) $y(0) = 0$ henholdsvis (ii) $y'(0) = 1$ gir følgende betingelser på konstantene c_1 og c_2: (i) gir at $c_1 = 0$, deretter gir (ii) at $y'(0) = c_2 = 1$. Dermed er den unike løsningen som løser initialverdiproblemet

$$y(x) = e^{-2x}\sin(x).$$

b) Ligningen

$$y'' + 5y' + 6y\ = 0$$

har karakteristisk ligning $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, som har to reelle løsninger $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = -3$. Dermed er generell løsning på formen

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}\ , \qquad c_1, c_2 \text{ vilkårlige reelle tall.}$$

Bruker ubestemte koeffisienters metode for å finne $y(x)$ som løser

$$y'' + 5y' + 6y\ = e^{-2x} - 12x - 10\,.$$

Partikulærløsning skal være på formen $y_p = x \cdot Ae^{-2x} + Bx + C$ for konstanter A, B og C. Siden Ae^{-2x} er løsning av den tilhørende homogene ligningen er dette leddet modifisert ved multiplikasjon med x. Setter man y_p inn i ligningen får man følgende krav på A, B og C: $A = 1$, $B = -2$ og $C = 0$. Dermed er $y(x)$ som løser den ikke-homogene ligningen på formen

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + xe^{-2x} - 2x.$$

c) Får oppgitt at den homogene ligningen har generell løsning $y_h = c_1 x + c_2 x^2$. Bruker variasjon av parametre for å finne partikulærløsning av den ikke-homogene ligningen:

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 2, \qquad x > 0.$$

Finner partikulærløsning y_p på formen

$$y_p = uy_1 + vy_2 \ \text{ der } \ u = -\int \frac{y_2 r}{W}dx \ \text{ og } v = \int \frac{y_1 r}{W}dx\,.$$

Her er $r = 2$ (høyre side i den ikke-homogene diff. ligningen) og $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ er Wronski-determinanten til y_1 og y_2, som vi får oppgitt er en basis av løsninger for tilhørende homogen ligning. $W = x \cdot 2x - 1 \cdot x^2 = x^2$, så

$$u = -\int \frac{2x^2}{x^2} dx = -\int 2dx = -2x \quad \text{og} \quad v = \int \frac{2x}{x^2} dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln(x)\,.$$

(NB: Tar ikke med integrasjonskonstanter her). Dermed er løsningen på form

$$y(x) = y_h + ux + vx^2 = c_1 x + c_2 x^2 - 2x^2 + 2x^2 \ln(x)$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

$\boxed{3}$ **a)** Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2ax + ay + \quad 3z &= 4a \\ x \quad + (a-1)z &= a \\ x + y - \quad z &= 1 \end{aligned}$$

har tilhørende augmentert matrise $\begin{bmatrix} 2a & a & 3 & 4a \\ 1 & 0 & a-1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Koeffisientmatrisen er 3×3-matrisen $\begin{bmatrix} 2a & a & 3 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, denne har determinant lik $3 + 2a - a^2$, som er null bare hvis $a = -1$ eller $a = 3$. For alle andre verdier av a har systemet *en unik løsning.*
Bruker den augmenterte matrisen til å drøfte andre muligheter for løsning: Gausseliminasjon gir trappe(echelon-)form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & (1-a) \\ 0 & 0 & (3+2a-a^2) & (3a-a^2) \end{bmatrix}.$$

Vi undersøker mulighet for at systemet er inkonsistent (ingen løsning), bruker nederste rad: Mulighet for inkonsistens når $3 + 2a - a^2 = 0$, og samtidig $3a - a^2 \neq 0$. $3 + 2a - a^2 = 0$ for $a = -1$ og $a = 3$. For $a = -1$ blir nederste rad i redusert matrise $[0\ 0\ 0\ -4]$, som gir at systemet *ikke* har løsning. For $a = 3$ blir trappeformen av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som svarer til et konsistent system med uendelig mange løsninger. NB: Hele oppgaven kan løses bare med drøfting av augmentert matrise, uten å bruke determinant.

b) Bruker redusert form av augmentert matrise fra (a) for å løse ligningssystemet når $a = 3$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kan reduseres til} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir at (i) $x = 3 - 2z$, (ii) $y = -2 + 3z$. Setter $z = t$, gir parametrisert løsning $x = -2t + 3,\ y = 3t - 2$, og $z = t$, løsning for alle reelle tall t.

4 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Karakteristisk polynom til matrisen A er

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)\,,$$

som er null for $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. Finner tilhørende egenvektorer ved å løse tilhørende ligningssystemer:

$\underline{\lambda_1 = -1}$ gir systemet $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Reduserer $A + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, som gir at parametrisert løsning til systemet er $x = -\frac{1}{2}t$, $y = t$. Dermed er alle egenvektorer tilhørende λ_1 på formen $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, for reelle tall $t \neq 0$.

$\underline{\lambda_1 = 0}$ gir systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

reduserer A til $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, som gir parametrisert løsning $x = -2s/3$, $y = s$. Dermed er alle egenvektorer tilhørende λ_2 på formen $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, for reelle tall $s \neq 0$.

b) Fra (a) har vi to lineært uavhengige egenvektorer (de tilhører ulike egenverdier) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Dermed vet vi at matrisen

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

oppfyller $A = PDP^{-1}$ der D er diagonalmatrisen med egenverdiene tilhørende $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ på diagonalen, dvs,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For et (positivt heltall) k er $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$, dermed er $A^{2006} = PD^{2006}P^{-1}$.

D er diagonal, og $D^{2006} = \begin{bmatrix} (-1)^{2006} & 0 \\ 0 & 0^{2006} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, og matriseproduktet

$$A^{2006} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Ser at systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -6y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

er på form $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, der $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, for samme matrise A som i oppgave (a) og (b). For to lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ til A, tilhørende de reelle egenverdiene $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 0$ er generell løsning på formen

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{0\cdot t}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^{-t} - 2c_2 \\ 2c_1 e^{-t} + 3c_2 \end{bmatrix},$$

der c_1 og c_2 er reelle tall. Tilleggsbetingelsene $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = -3$ gir følgende krav til c_1 og c_2:
(i) $y_1(0) = -c_1 e^{-0} - 2c_2 = -c_1 - 2c_2 = 1$ og (ii) $y_2(0) = 2c_1 e^{-0} + 3c_2 = 2c_1 + 3c_2 = -3$.
Dette gir at $c_1 = -3$ og $c_2 = 1$, dermed er løsningen på systemet

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2 \\ -6e^{-t} + 3 \end{bmatrix}$$

5 **a)** Riktig svar: **C**.

Gitt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, så er $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ en 3×3-matrise, og den ser slik ut: $A = \begin{bmatrix} x_1\mathbf{y} \\ x_2\mathbf{y} \\ x_3\mathbf{y} \end{bmatrix}$.
Hverken $\mathbf{x}$ eller $\mathbf{y}$ er nullvektoren, dermed er minst en $x_i \neq 0$. Ved å utføre radoperasjonene $R_j \to R_j - \frac{x_j}{x_i}R_i$ på A får vi gjort om alle rader unntatt rad i til nullrader: $R_j - \frac{x_j}{x_i}R_i = x_j\mathbf{y} - \frac{x_j}{x_i}x_i\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Rad i er lik $x_i\mathbf{y}$, og kan ikke være en nullrad siden x_i er ulik 0 og $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Dermed er rangen til A lik 1, og $rank(A) + dim(Null(A)) = 3$, dermed er $\dim(\mathrm{Null}(A)) = 2$.

b) Riktig svar: **D**.

$\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ er lineært uavhengige, så rangen til A er 2. $Rank(A) + dim(Null(A)) = 4$ (antall kolonner i A), så $Null(A)$ skal ha en basis med to elementer, dermed kan bare **B** eller **D** være riktig. Nullrommet står ortogonalt på radrommet, så da er det bare å sjekke hvilke vektorer som gir prikkprodukt null med $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$, det er de to i **D**.

6 Minste-kvadrat løsningen til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsningen $\overline{\mathbf{x}}$ til det tilhørende normalsystemet, $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Får at

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Normalsystemet $\begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \end{bmatrix}$ har løsning $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A er

$$\mathbf{p} = A\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$