TMA4110/4115 Matematikk 3 eksamen 14. august 2008

Løsningsforslag

1 Vi gjør likningen om ved å skrive z på polarform $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$r^3 e^{3i\theta} = 2r^2 e^{-2i\theta}$$

og multipliserer med $e^{2i\theta}$ på begge sider av likningen,

$$r^3 e^{5i\theta} = 2r^2.$$

Absoluttverdien av høyre side og absoluttverdien av venstre side må være like: $r^3 = 2r^2$. Vi løser for r og får $r = 2$ eller $r = 0$. For $r = 0$ får vi løsningen $z = 0$. For $r = 2$ får vi

$$e^{5i\theta} = 1.$$

Det vil si at $\theta = \frac{2\pi k}{5}$ der $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Løsningene er $z = 0$, $z = 2$, $z = 2e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $z = 2e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $z = 2e^{\frac{6\pi}{5}i}$ og $z = 2e^{\frac{8\pi}{5}i}$.

2a Den karakteristiske likningen til $y'' + 9y = 0$, $\lambda^2 + 9 = 0$, har røtter $\lambda = \pm 3i$. Da er generell løsning $y(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$. Initialbetingelsene gir $2 = y(\pi) = -c_1$ og $-3 = y'(\pi) = -3c_2$. Det vil si $c_1 = -2$ og $c_2 = 1$. Løsningen er $y(t) = -2\cos 3t + \sin 3t$.

2b Den karakteristiske likningen til den homogene likningen $y'' + 3y' - 10y = 0$ er $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. Denne har røtter $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -5$. Ifølge ubestemte koeffisienters metode har $y'' + 3y' - 10y = 7xe^{2x}$ en partikulær løsning av formen $y_p = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$. Vi deriverer y_p to ganger: $y_p' = (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x}$, $y_p'' = (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x}$ og setter inn i differensiallikningen:

$$(14Ax + 2A + 7B)e^{2x} = 7xe^{2x}.$$

Det gir $14A = 7$ og $2A + 7B = 0$. Da har vi $A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{1}{7}$. Partikulær løsning er $y_p = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x)e^{2x}$.

2c Vi finner først generell løsning av tilhørende homogen likning $x^2y'' - 6y = 0$ ved å substituere $y = x^m$: $x^2(m^2 - m)x^{m-2} - 6x^m = 0$. Vi omformer og får $(m^2 - m - 6)x^m = 0$. Siden $x^m \neq 0$, har vi $m^2 - m - 6 = 0$. Røttene til sistnevnte likning er $m_1 = -2$ og $m_2 = 3$. Det gir basis for løsningsmengden til den homogene likningen: $y_1 = x^{-2}$, $y_2 = x^3$. Den generelle løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor $y_h = c_1x^{-2} + c_2x^3$. Wronskideterminanten er

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^3 \\ -2x^{-3} & 3x^2 \end{vmatrix} = 5.$$

Vi gjør om likningen vi skal løse til standardform ved å dele på x^2 på begge sider: $y'' - (6/x^2)y = x$, $\quad (r(x) = x)$. Metoden for variasjon av parametre gir partikulær løsning

$$\tilde{y}_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx = -x^{-2} \int \frac{x^4}{5}\,dx + x^3 \int \frac{x^{-1}}{5}\,dx = -\frac{1}{25}x^3 + \frac{1}{5}x^3 \ln|x|.$$

Vi sløyfer første ledd siden det er homogen løsning og sløyfer absoluttverditegn siden $x > 0$. Partikulær løsning er $y_p = \frac{1}{5}x^3 \ln x$. Generell løsning er $y = y_h + y_p = c_1x^{-2} + c_2x^3 + \frac{1}{5}x^3 \ln x$.

3 Vi regner ut determinanten til A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a^2-25) = a(a-5)(a+5).$$

Siden A er inverterbar hvis og bare hvis determinanten til A er forskjellig fra 0, så har vi at A er inverterbar hvis og bare hvis $a(a-5)(a+5) \neq 0$, dvs $a \neq 0, -5, 5$.

4a Vi setter opp koeffisientmatrisen for likningsystemet og utfører Gauss-Jordan eliminasjon:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -9 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(4)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -13 & 13 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1/13)R_2]{(1/8)R_3}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3)R_2+R_1]{(1)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Vi identifiserer de ledende variablene x_1 og x_2 ved å se på på E. Da har vi 2 frie variabler; x_3 og x_4. Vi innfører to parametre s, t og setter $x_3 = s$, $x_4 = t$. Ikkenullradene i E står for likningene $x_1+2x_3-x_4 = 0$ og $x_2-x_3+x_4 = 0$. Vi løser og får $x_1 = -2x_3+x_4 = -2s+t$ og $x_2 = s-t$. Finner så basis for løsningen: $s = 1, t = 0$ gir $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 1, 1, 0)$. $s = 0, t = 1$ gir $\mathbf{v}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 0, 1)$. Løsningen på systemet blir derfor

$$s(-2, 1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1).$$

4b Vi bruker det vi fant i oppgave a). Siden $\mathrm{Null}(A)$ er løsningsmengden av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, er basisen vi fant for løsningen av systemet i a) en basis for $\mathrm{Null}(A)$:
$\{(-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$.

Som basis for $\mathrm{Row}(A)$ bruker vi radene forskjellig fra 0-radene i matrisen E:
$\{(1, 0, 2, -1), (0, 1, -1, 1)\}$.

Som basis for $\mathrm{Col}(A)$ bruker vi kolonnene i A som tilsvarer pivoteringskolonnene i echelonmatrisen E:
$\{(1, -4, 2), (3, 1, -2)\}$.

5a Karakteristisk likning er

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1).$$

Løser vi likningen $0 = -\lambda(\lambda^2-1)$, får vi egenverdiene $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ og $\lambda_3 = 1$. Vi finner egenvektorene

$$\lambda_1 = -1\text{: } (A - (-1)\, I)\, \mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har en fri variabel $x_3 = s$. De ledende variablene blir da $x_2 = x_3 = s$ og $x_1 = 0$. En egenvektor tilhørende $\lambda_1 = -1$ er $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)$. (Vi velger $s = 1$.)

$\lambda_2 = 0$: $(A - 0\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vi har igjen en fri variabel $x_3 = s$. De ledende variablene blir $x_2 = x_3 = s$ og $x_1 = -x_3 = -s$. En egenvektor tilhørende $\lambda_2 = 0$ er derfor $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1)$ (Vi setter $s = 1$).

$\lambda_3 = 1$: $(A - 1\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En fri variabel: $x_3 = s$. De frie variablene blir $x_2 = 0$ og $x_1 = x_3 = s$. En egenvektor tilhørende $\lambda_3 = 1$ er $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$. (Vi setter $s = 1$).

Egenvektorene over er lineært uavhengige siden de tilhører forskjellige egenverdier av A. Siden vi har 3 lineært uavhengige egenvektorer for A og A er en 3×3-matrise, er A diagonaliserbar. Vi setter

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har $A^{4115} = PD^{4115}P^{-1}$. Vi regner ut

$$D^{4115} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{4115} = \begin{bmatrix} (-1)^{4115} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{4115} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D.$$

Derfor er $A^{4115} = PDP^{-1} = A$.

5b Vi ser at systemet av differensiallikninger er på formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, der $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Vi har da at generell løsning er på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3 e^{t}\mathbf{v}_3.$$

Initialbetingelsen gir $(3, 2, 4) = \mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = P\mathbf{c}$ der $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Vi løser likningen ved å omforme totalmatrisen til redusert echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[(1)R_1+R_3]{(1)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)R_3+R_2]{(-1)R_3+R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{SWAP(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Vi har med andre ord $(c_1, c_2, c_3) = (3, -1, 2)$. Løsning av initialverdiproblemet er derfor

$$\mathbf{x}(t) = 3e^{-t}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2e^{t}\mathbf{v}_3,$$

det vil si

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 2e^{t} \\ x_2(t) &= 3e^{-t} - 1 \\ x_3(t) &= 3e^{-t} - 1 + 2e^{t}. \end{aligned}$$

6a Vi observerer at $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ allerede er ortogonale. Vi setter derfor $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, -2)$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 = (2, 0, -1, 2)$. Gram-Schmidt gir da den siste vektoren

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_3 &= \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 \\ &= (1, 1, -1, 0) - \tfrac{3}{9}(2, 1, 0, -2) - \tfrac{3}{9}(2, 0, -1, 2) = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0).\end{aligned}$$

Ortogonal basis for $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er

$$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, -2), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 0, -1, 2), \quad \mathbf{u}_3 = (-1, 2, -2, 0).$$

6b Vi benytter at basisen i a) er ortogonal: Ortogonalprojeksjonen av $\mathbf{w} = (1, 4, 4, 2)$ ned på underrommet V er

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\ &= \tfrac{2}{9}(2, 1, 0, -2) + \tfrac{2}{9}(2, 0, -1, 2) - \tfrac{1}{9}(-1, 2, -2, 0) = (1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

7 Det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er i $\mathrm{Col}(A)$. Siden A er symmetrisk, har vi at $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Row}(A)$. Vi vet at $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Null}(A)$ er ortogonale komplementer, og det betyr at $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Null}(A)^\perp$ når A er symmetrisk.

Når A er symmetrisk, har følgelig $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er i $\mathrm{Null}(A)^\perp$, dvs. hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er ortogonal til $\mathrm{Null}(A)$.