TMA4115 Matematikk 3 eksamen 02.06.04

Løsningsforslag

1 **a)** Siden $-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2}e^{i(5\pi/6)}$ får vi

$$w=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right)^3=\left(\frac{1}{2}e^{5\pi i/6}\right)^3=\frac{1}{8}e^{5\pi i/2}=\frac{1}{8}e^{i\pi/2}.$$

Ligningen $z^3=w=\frac{1}{8}e^{i\pi/2}$ har løsningene $z=z_k=\frac{1}{2}e^{\pi i/6+2k\pi i/3}$, $k=0,\ 1,\ 2$. Det gir

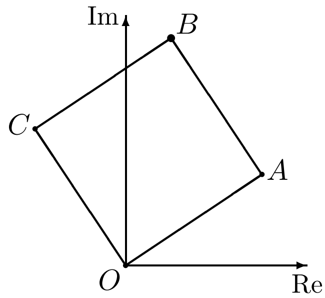
$$z_0=\frac{1}{2}e^{\pi i/6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4},\ z_1=\frac{1}{2}e^{5\pi i/6}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4},\ z_2=\frac{1}{2}e^{3\pi i/2}=-\frac{i}{2}.$$

Som kontroll har vi at $-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}i$ må være en av løsningene, her z_1. Vi kunne også funnet de to andre løsningene ved å multipisere z_1 med $e^{2\pi i/3}$ og $e^{4\pi i/3}$.

b) I kvadratet $OABC$ skal hjørnet A skal være tallet z. Se figuren.

Multiplikasjon med i er geometrisk en rotasjon 90° mot urviseren. Følgelig må C være iz. Siden B er summen av A og C, blir svaret

$$B=z+iz=(1+i)z \quad \text{og} \quad C=iz.$$



2 **a)** For $x\neq 0$ (og vi velger $x>0$ pga. initialbetingelsen) er en integrerende faktor for den lineære differensialligningen

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2} \qquad \text{gitt ved} \qquad F(x)=e^{\int (2/x)\,dx}=e^{2\ln x}=x^2.$$

Multipliserer vi med $F(x)$, kan ligningen omskrives til

$$\left(x^2y\right)'=\cos x \qquad \text{som gir} \qquad x^2y=\sin x+C.$$

Av initialbetingelsen $y(\pi/2)=0$ får vi $0=1+C$, $C=-1$, og løsningen på initialverdiproblemet blir

$$y=\frac{\sin x-1}{x^2}, \qquad x>0.$$

b) Eulers metode med skrittlengde $h=0.5$ på ligningen $y'=1+(x-y)^2$ er

$$x_{n+1}=x_n+0.5, \quad y_{n+1}=y_n+0.5\left(1+(x_n-y_n)^2\right), \quad n=0,1,2,\dots .$$

Fra initialbetingelsen $y(2)=1$ får vi $x_0=2.0$, $y_0=1.0$. Da blir

$$x_1=2.5, \qquad y_1=1.0+0.5\left(1+1.0^2\right)=2.0$$
$$x_2=3.0, \qquad y_2=2.0+0.5\left(1+0.5^2\right)=2.625.$$

Følgelig er $y(2.5)\approx 2.0$ og $y(3.0)\approx 2.625$.

$\boxed{3}$ **a)** I differensialligningen $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$ har den homogene ligningen karakteristisk ligning $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ med løsningene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -2$. Den homogene ligningen har da generell løsning $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Ifølge ubestemte koeffisienters metode har den inhomogene ligningen en partikulær løsning av formen $y_p = x \cdot Ae^x + Be^{2x}$. Da er $y_p'' + y_p' - 2y_p = 3Ae^x + 4Be^{2x}$, og y_p er løsning hvis $3A = 1$, $A = \frac{1}{3}$ og $4B = 1$, $B = \frac{1}{4}$. Generell løsning av $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$ blir følgelig

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{3} x e^x + \tfrac{1}{4} e^{2x}.$$

b) Med $y_1 = x + a$ er $(1 - x^2)y_1'' + 2xy_1 - 2y_1 = -2a$. Følgelig er $y_1 = x + a$ løsning av $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ hvis $a = 0$. For $y_2 = x^2 + b$ får vi $(1-x^2)y_2'' + 2xy_2 - 2y_2 = 2 - 2b$. Følgelig er $y_2 = x^2 + b$ løsning hvis $2 - 2b = 0$, $b = 1$.

Løsningene $y_1 = x$ og $y_2 = x^2 + 1$ er lineært uavhengige på intervallet $-1 < x < 1$ siden forholdet $y_1/y_2 = x/(x^2 + 1)$ ikke er konstant.

Generell løsning av $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ på intervallet $-1 < x < 1$ er da

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 \left(x^2 + 1\right).$$

c) Vi bruker metoden med variasjon av parametrene for å finne en partikulær løsning av

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6\left(1 - x^2\right)^2, \qquad -1 < x < 1.$$

Den homogene ligningen er løst i **b)**. En partikulær løsning har formen $y_p = uy_1 + vy_2 = xu + (x^2 + 1)v$. Til bestemmelse av u' og v' har vi ligningssystemet $u'y_1 + v'y_2 = 0$, $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$. Her betyr $r(x)$ høyresiden i ligningen når ligningen er på standardform $(y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x))$. Vi får ligningssystemet

$$\begin{aligned} xu' + (x^2+1)v' &= 0 \\ u' + \quad 2xv' &= 6(1 - x^2) \end{aligned} \qquad \text{med løsning} \qquad \begin{aligned} v' &= -6x \\ u' &= 6(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Dermed får vi $u = 2x^3 + 6x$, $v = -3x^2$ og $y_p = (2x^3 + 6x)x - 3x^2(x^2 + 1) = 3x^2 - x^4$.

$\boxed{4}$ **a)** Når A og B er 2×2 – matriser med determinanter henholdsvis 2 og 3, er

$$\det\left(-2A^{-1}B^T\right) = (-2)^2 \det\left(A^{-1}\right) \det\left(B^T\right) = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 3 = 6.$$

Riktig svar er følgelig alternativ **C**.

b) Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen med de tre vektorene som kolonnevektorer har determinant ulik 0. Her er

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 4 \\ -3 & -5 & c-3 \end{vmatrix} = 10c - 10.$$

Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare $10(c - 1) \neq 0$, $c \neq 1$. Riktig svar er altså **C**.

$\boxed{5}$ **a)** Vi løser ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved å omforme koeffisientmatrisen A til en echelon-matrise E ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

Med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ er x_1 og x_3 ledervariabler, og x_2 og x_4 følgelig frie variabler. Setter vi $x_2 = s$ og $x_4 = t$ får vi ved tilbakesubstitusjon $x_3 = x_4 = t$ og $x_1 = -2x_2 - x_3 = -2s - t$. Løsningen av ligningssystemet er altså

$$\mathbf{x} = (-2s - t, s, t, t) = s(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

b) En basis for radrommet til A får vi ved å ta ikkenullradene i echelonmatrisen E.

$$\text{Basis for Row}(A): \quad \mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, -1).$$

En basis for kolonnerommet til A får vi ved å ta de kolonnevektorene i A som tilsvarer pivotkolonnene i echelonmatrisen E, det blir her kolonnene 1 og 3:

$$\text{Basis for Col}(A): \quad \mathbf{w}_1 = (1, 1, 2),\ \mathbf{w}_2 = (1, -2, -3).$$

c) Vektoren $\mathbf{y} = (1, 5, -3)$ ligger i det ortogonale komplementet $\mathrm{Col}(A)^\perp$ hvis $\mathbf{y} \cdot \mathbf{w} = 0$ for alle $\mathbf{w} \in \mathrm{Col}(A)$. Her er

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{w_1} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{w_2} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) = 0.$$

Siden alle vektorer i $\mathrm{Col}(A)$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{w_1}$ og $\mathbf{w_2}$, er følgelig $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(A)^\perp$. Kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$ og det ortogonale komplementet er underrom i $\mathbb{R}^3$, og vi har

$$\dim \mathrm{Col}(A) + \dim \mathrm{Col}(A)^\perp = 3.$$

Fra **b)** vet vi at $\dim \mathrm{Col}(A) = 2$. Følgelig er $\mathrm{Col}(A)^\perp$ et endimensjonalt underrom i $\mathbb{R}^3$, og består, i tillegg til $\mathbf{y}$, av alle vektorer $t\mathbf{y}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$.

6 **a)** Vi finner egenverdiene til A ved å løse den karakteristiske ligningen $|A - \lambda I| = 0$. Her er

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & -\lambda & 4 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ved å utvikle etter første rad får vi

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) - (12 - 4\lambda) + (-2)(-4+\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 + 2(\lambda-2) = (\lambda-2)\left(-\lambda^2 + 3\lambda\right) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Egenverdiene til A er følgelig 0, 2 og 3.

Regner vi ut $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$, får vi

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\mathbf{v}_1, \qquad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_2.$$

Følgelig er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ egenvektorer, og tilhørende egenverdier λ_1 og λ_2 er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 2$.

b) Vi vil bestemme en egenvektor $\mathbf{v}_3$ til egenverdien $\lambda_3 = 3$. Da må vi finne en løsning $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ av ligningssystemet $(A - 3I)\mathbf{v} = 0$. Vi setter $\mathbf{v} = (x, y, z)$ og omformer koeffisientmatrisen til echelonform:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Herav følger $y = 0$ og $x = -z$. En egenvektor tilhørende $\lambda_3 = 3$ er følgelig $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$.

De tre egenvektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige siden de tilhører forskjellige egenverdier. Da er egenvektormatrisen $P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ inverterbar, og $P^{-1}AP$ blir diagonalmatrisen D med egenverdiene λ_1, λ_2 og λ_3 på diagonalen.

Følgelig er $P^{-1}AP = D$ hvis

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Med $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ kan differensialligningssystemet skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Generell løsning er

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3$$

når $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige egenvektorer for A. Fra **b)** får vi

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De gitte initialbetingelsene er $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 2$. De er oppfylt dersom $c_1(-1, 3, 1) + c_2(0, 2, 1) + c_3(-1, 0, 1) = (0, 1, 2)$. Vi får et inhomogent ligningssystem

$$\begin{aligned} -c_1 \phantom{{}+2c_2} - c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 \phantom{{}- c_3} &= 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

som vi løser ved å omforme systemets totalmatrise til echelonform:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da får vi $c_3 = 1$, $c_2 = 2$ og $c_1 = -c_3 = -1$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y_1 = 1 - e^{3t}, \qquad y_2 = -3 + 4e^{2t}, \qquad y_3 = -1 + 2e^{2t} + e^{3t}.$$

$\boxed{7}$ Vi skal vise at $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ for alle vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$ dersom A er en symmetrisk $n \times n$–matrise med bare positive egenverdier.

En symmetrisk matrise A er ortogonalt diagonaliserbar. Det fins altså en ortogonal matrise P slik at $P^T AP$ er diagonalmatrisen D med egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ til A på diagonalen.

Vi innfører $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ved $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ og får

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Her er $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\ldots$, $\lambda_n > 0$. Hvis $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så er også $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (for $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ medfører $\mathbf{x} = P\mathbf{y} = \mathbf{0}$). Dermed er $y_i \neq 0$ og følgelig $\lambda_i y_i^2 > 0$ for minst en i. Siden $\lambda_i y_i^2 \geq 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$ følger

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0 \quad \text{for alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ i } \mathbb{R}^n.$$