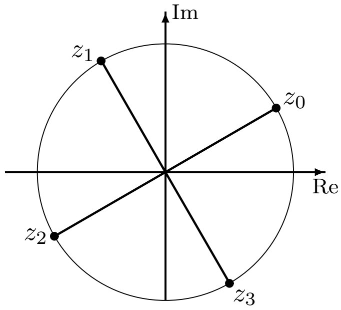
TMA4115 Matematikk 3
eksamen 07.06.06

Løsningsforslag

1 Siden $(\sqrt{3}+i)^2 = 3+2i\sqrt{3}+i^2 = 2(1+i\sqrt{3})$, får vi

$$w = \big(\sqrt{3}+i\big)^4 = 4\big(1+i\sqrt{3}\big)^2 = 4\big(1+2i\sqrt{3}-3\big) = -8+8i\sqrt{3}\,.$$

Kjenner vi én løsning z_0 av ligningen $z^4 = w$, er de andre løsningene gitt ved $z_k = z_0 e^{ik\pi/2}$, $k = 1, 2, 3$.



Her er $z_0 = \sqrt{3}+i$ løsning av ligningen siden $z_0^4 = w$. Punktet z_0 ligger i første kvadrant, og da finner vi løsningen z_1 i andre kvadrant ved å multiplisere z_0 med $e^{i\pi/2} = i$:

$$z_1 = i(\sqrt{3}+i) = -1+i\sqrt{3}\,.$$

Alternativt:
Bruker vi polarform $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$, får vi

$$w = \big(\sqrt{3}+i\big)^4 = 16e^{i2\pi/3} = 16e^{i(2\pi/3+2k\pi)}.$$

Ligningen $z^4 = w$ har løsningene $z = z_k = 2e^{i(2\pi/3+2k\pi)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Det gir

$$z_0 = 2e^{\pi i/6} = \sqrt{3}+i, \quad z_1 = 2e^{2\pi i/3} = -1+i\sqrt{3} \quad \text{(i andre kvadrant)},$$
$$z_2 = 2e^{7\pi i/6} = -z_0 = -\sqrt{3}-i \quad \text{og} \quad z_3 = 2e^{5\pi i/3} = -z_1 = 1-i\sqrt{3}.$$

2 **a)** Karakteristisk ligning for differensialligningen $y'' + 6y' + 10y = 0$ er $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ med løsningene $\lambda_1 = -3+i$ og $\lambda_2 = -3-i$. Generell løsning av differensialligningen er følgelig

$$y = c_1 e^{-3x}\cos x + c_2 e^{-3x}\sin x.$$

Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $c_1 = 0$. Da blir $y' = c_2 e^{-3x}\cos x - 3c_2 e^{-3x}\sin x$, og initialbetingelsen $y'(0) = 2$ gir $c_2 = 2$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y = 2e^{-3x}\sin x.$$

b) I differensialligningen $y'' - 3y' + 2y = e^x + 10\sin x$ har den homogene ligningen karakteristisk ligning $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ med løsningene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Den homogene ligningen har da generell løsning

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Ifølge ubestemte koeffisienters metode har den inhomogene ligningen en partikulær løsning av formen

$$y_p = x \cdot Ae^x + B\sin x + C\cos x.$$

Da er $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -Ae^x + (B+3C)\sin x + (-3B+C)\cos x$, og y_p er løsning hvis $-A = 1$, $B + 3C = 10$ og $-3B + C = 0$. Det gir $A = -1$, $B = 1$ og $C = 3$. En partikulær løsning er følgelig $y_p = -xe^x + \sin x + 3\cos x$, og generell løsning blir

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x + \sin x + 3\cos x.$$

c) I differensialligningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = x$ har vi gitt homogenløsningen

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

Vi bruker metoden med variasjon av parametre for å finne en partikulær løsning av formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Her er Wronskideterminanten $W = y_1y_2' - y_2y_1' = x^3$ og $r = x$. Da får vi

$$\begin{aligned} y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx \\ &= -x^2 \int \ln x\,dx + x^2 \ln x \int dx = -x^2(x\ln x - x) + x^3 \ln x = x^3. \end{aligned}$$

Alternativt: u' og v' skal tilfredsstille ligningssystemet $u'y_1 + v'y_2 = 0$, $u'y_1' + v'y_2' = x$. Herav får vi $u' = -\ln x$ og $v' = 1$. Ved integrasjon følger $u = -(x\ln x - x)$ og $v = x$, og dermed $y_p = uy_1 + vy_2 = (x - x\ln x)\cdot x^2 + x \cdot x^2 \ln x = x^3$.

Generell løsning av den gitte differensialligningen blir da

$$y = y_h + y_p = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + x^3, \qquad x > 0.$$

3 **a)** Vi løser ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved å omforme A til en echelonmatrise E:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_4]{(-2)R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[SWAP(R_3,R_4)]{\substack{(-1)R_2+R_3 \\ (-1)R_2+R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ er x_1, x_3 og x_5 ledervariabler og x_2 og x_4 følgelig frie variabler. Setter vi $x_2 = s$ og $x_4 = t$, får vi ved tilbakesubstitusjon $x_5 = 0$, $x_3 = x_4 + x_5 = t$ og $x_1 = -2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -2s - 3t$. Løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er altså

$$\mathbf{x} = (-2s - 3t, s, t, t, 0) = s(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-3, 0, 1, 1, 0), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Da er $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, 1, 1, 0)\}$ en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

b) Basis for

$\mathrm{Col}(A)$:	$\{(1, 0, 2, 1), (1, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 1)\}$	(kolonnene i A i som tilsvarer pivotkolonnene i E)
$\mathrm{Row}(A)$:	$\{(1, 2, 1, 2, 1), (0, 0, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 0, 1)\}$	(ikkenullradene i E)
$\mathrm{Row}(A)^\perp$:	$\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, 1, 1, 0)\}$	($\mathrm{Row}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A)$).

c) Vektoren $\mathbf{v} = (2, 1, -1, 0)$ er i $\mathrm{Col}(A)^\perp$ hvis $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ for alle $\mathbf{w}$ i en basis for $\mathrm{Col}(A)$. Her er

$$\mathbf{v}\cdot(1, 0, 2, 1) = 2 - 2 = 0,\ \ \mathbf{v}\cdot(1, 1, 3, 2) = 2 + 1 - 3 = 0 \text{ og } \mathbf{v}\cdot(1, -1, 1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Følgelig er $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(A)^\perp$. Hvis, generelt, V er et underrom i $\mathbb{R}^n$, så er $\dim V + \dim V^\perp = n$. Her er $\mathrm{Col}(A)$ underrom i $\mathbb{R}^4$, og vi får

$$\dim \mathrm{Col}(A)^\perp = 4 - \dim \mathrm{Col}(A) = 1.$$

$\mathrm{Col}(A)^\perp$ er altså endimensjonalt, og enhver vektor $\neq \mathbf{0}$ er en basis. Spesielt er $\{\mathbf{v}\}$ en basis for $\mathrm{Col}(A)^\perp$. Alternativt kan vi vise at ligningssystemet $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsning $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Siden $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A^T)$, gir det svar på begge delspørsmålene.

4 **a)** Normalsystemet $A^T A\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ blir her

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

med løsning $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 1$. Riktig svar er følgelig alternativ **C**. Vi kunne også funnet svaret ved å velge det alternativet der kvadratavviket

$$E^2 = (\bar{x} + 3\bar{y} - 5)^2 + (\bar{x} - \bar{y} - 1)^2 + (\bar{x} + \bar{y})^2$$

blir minst.

b) En kvadratisk matrise er ortogonal hvis og bare hvis kolonnene er ortogonale enhetsvektorer. Det er oppfylt hvis $2\alpha\beta + 2 = 0$, $2\alpha^2 + 2 = 4$ og $2\beta^2 + 2 = 4$. Følgelig må vi ha $\alpha = 1$ og $\beta = -1$ eller $\alpha = -1$ og $\beta = 1$. Med $\alpha = 1$ og $\beta = -1$ får vi

$$\det P = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

der vi adderte kolonne 1 til kolonne 2, 3 og 4 før vi kofaktorutviklet determinanten langs rad 1. Med $\alpha = -1$ og $\beta = 1$ får vi samme matrise med kolonne 1 og 4 byttet om. Da skifter determinanten fortegn, og riktig svar blir følgelig **C**.

5 **a)** Vi finner egenverdiene til A ved å løse den karakteristiske ligningen $|A - \lambda I| = 0$. Her er

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ved kofaktorutvikling etter første rad får vi

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (3-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - (-1)(-2\lambda + 2) + (-2)(2\lambda - 2) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Følgelig har A egenverdiene $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Vi finner så egenvektorene. For $\lambda = 0$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, og alle egenvektorene for $\lambda_1 = 0$ er gitt ved $r\mathbf{v_1}$, $r \neq 0$.

For $\lambda = 1$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir ligningen $2x - y - 2z = 0$, og ligningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har generell løsning $\mathbf{x} = s\mathbf{v_2} + t\mathbf{v_3}$ der $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$. Alle egenvektorene for $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ er gitt ved $s\mathbf{v_2} + t\mathbf{v_3}$ der s og t ikke begge er null.

b) De tre egenvektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige. Da er egenvektormatrisen $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ inverterbar, og $P^{-1}AP$ blir diagonalmatrisen D med egenverdiene λ_1, λ_2 og λ_3 på diagonalen.

Følgelig er $P^{-1}AP = D$ hvis

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Med $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ kan differensialligningssystemet skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Generell løsning er

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3$$

når $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige egenvektorer for A. Her får vi

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Setter vi inn initialbetingelsene, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 \quad + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 \qquad\quad &= 1 \\ c_1 \qquad\quad + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

med løsning $c_1 = 5$, $c_2 = -2$ og $c_3 = -3$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y_1 = 5 - 5e^t, \qquad y_2 = 5 - 4e^t, \qquad y_3 = 5 - 3e^t.$$

c) Vi har $A = PDP^{-1}$. Siden $D^2 = D$, får vi $A^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Altså er A idempotent. Alternativt kunne vi vist dette ved å utføre matrisemultiplikasjonen:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2-4 & -3+2 & -6+2+2 \\ 6-4 & -2+2 & -4+2 \\ 6-2-2 & -2+1 & -4+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvis λ er egenverdi for en matrise B, så er $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ for en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Da er

$$B^2\mathbf{v} = B\,(B\mathbf{v}) = B\,(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\,(B\mathbf{v}) = \lambda\,(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Hvis B er idempotent, er $B^2\mathbf{v} = B\mathbf{v}$. Følgelig er $\lambda^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dvs. $(\lambda^2 - \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, følger $\lambda^2 - \lambda = 0$ som medfører $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.