Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eldar Straume
Telefon: 73 59 66 83

EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

Bokmål
Mandag 3. desember 2001
Kl. 09.00-14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt
- Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Sensuren faller i uke 2.

Oppgave 1

a) Løs differensiallikningen

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$$

b) Finn generell løsning av den inhomogene differensiallikningen

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$$

Hva blir løsningen når vi har initialkravene $y(0) = y'(0) = 0$?

c) Løs differensiallikningen

$$t^2 x'(t) + x(t) = 1$$

med initialkravet $x(1) = 1 + e$.

d) Finn generell løsning av differensiallikningen

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = \frac{e^{3t}}{t^3}$$

Oppgave 2

Skriv på polarform $z = re^{i\theta}$ alle komplekse tall som oppfyller likningen

$$z^5 + 16(\sqrt{3} - i) = 0$$

og vis på en tegning hvor tallene ligger i det komplekse plan.

Oppgave 3

(a) Utfør Gauss-Jordan-eliminasjon og transformer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

til redusert trappeform (reduced echelon form), og løs likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Finn dimensjonen og finn en basis for hvert av de tre rommene $Col(A)$, $Row(A)$ og $Row(A)^{\perp}$.

(c) La $W \subset \mathbb{R}^4$ være mengda av vektorer $\mathbf{b}$ slik at likningsystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har en løsning. Vis at $W = Col(A)$. Undersøk også om likningen har en løsning når

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) Bestem en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^T$. Løs deretter differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 13y_1 + 12y_2 \\ y_2' &= 12y_1 + 13y_2 \end{aligned}$$

c) Likningen

$$13x^2 + 24xy + 13y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 24$$

fremstiller et kjeglesnitt i xy-planet. Innfør et nytt koordinatsystem (x', y') slik at likningen får enklest mulig form. Tegn kjeglesnittet og de nye koordinataksene i xy-planet.

Oppgave 5

Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet $V \subset \mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

Vis at hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er to ortonormale vektorer i $\mathbb{R}^n$ og P er en ortogonal $n \times n$-matrise, så er også $P\mathbf{x}$ og $P\mathbf{y}$ to ortonormale vektorer.