Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag, tlf. 73 59 35 21

EKSAMEN I FAG SIF5009/SIF5010 MATEMATIKK 3

Onsdag 6. august 2003
Tid: 09:00–14:00
Bokmål

Hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensur: 1. september 2003.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

Skriv det komplekse tallet $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2003}$ på formen $a+ib$ der $a,b\in\mathbb{R}$.

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$(*)\qquad y' = x + y,\ y(0) = -1.$

a) Tilnærm $y\left(\frac{3}{5}\right)$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = 0,2$.

b) Løs $(*)$ og finn **eksakt** verdi av $y\left(\frac{3}{5}\right)$. Kommentar?

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 3y' = 6 - 2e^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2.$$

Finn generell løsning av differensialligningene

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x \ (x > 0)$

c) $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$

Oppgave 4

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 1+\alpha \end{bmatrix}$ der $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Bestem $\det A$ og avgjør for hvilke α matrisen A er inverterbar.

b) For hvilke verdier av α har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger, ingen løsninger?

Oppgave 5

Gitt $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^4$.

a) Finn en basis for $\mathbb{R}^4$ som inneholder $\mathbf{x_1}$ og $\mathbf{x_2}$.

La $V = \text{span}\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$.

b) Finn en ortonormal basis for V.

c) Finn en basis for $V^\perp$.

Oppgave 6

Vis at dersom matrisen A er ortogonalt diagonaliserbar ("orthogonally diagonalizable") så er A symmetrisk.

Oppgave 7

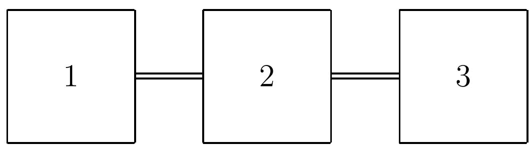
a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Løs differensialligningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

c) Tre tanker fylt med en gass er forbundet med to rør som antydet på figuren.



Rørene er stengt med hver sin ventil som åpnes ved tiden $t = 0$. La $x_i = x_i(t)$ være antall kilogram gass i tank i, $i = 1, 2, 3$, ved tiden $t \geq 0$. Vi antar videre at når ventilen mellom tank i og $i+1$ er åpen, vil det strømme $k(x_i - x_{i+1})$ kilogram gass pr sekund fra tank i til tank $i+1$ der $k > 0$ er en konstant.

Hva blir $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, når $k = 0,01$ og $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 3$? (Blir det like mye gass i hver tank når $t \to \infty$?)