Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal   tlf. 735 93468

EKSAMEN I TMA4110/4115 MATEMATIKK 3

Torsdag 11. august 2005
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1
La z_1 og z_2 være komplekse tall. Vis at

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Vink: $|z|^2 = z\overline{z}$.

Oppgave 2
Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad y' = x + y, \qquad y(0) = 0.$$

a) Finn en tilnærmet verdi for $y(0.3)$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$.

b) Løs initialverdiproblemet $(*)$ eksakt og sammenlign med den tilnærmede verdien i **a)**.

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x, \qquad x > 0.$$

Oppgitt integral: $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(1+\ln x) + C.$

Oppgave 4

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for hvert av rommene $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$.

Oppgave 5

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

der a er et vilkårlig reelt tall.

a) Vis at $\det A = 0$ når $a = 1$ og $a = -2$.

b) Finn A^{-1} når $a = 0$.

c) Vis at A har egenverdiene $a-1$ og $a+2$ og finn de tilhørende egenvektorene.

d) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + ay_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + ay_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelser $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 2$.

Oppgave 6

La A være en $m \times n-$matrise med $m > n$. Gjør rede for at det fins en vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ikke* har løsning.