Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg mobil 924 48 828

Eksamen i TMA4115 Matematikk 3

Bokmål
Torsdag 4. juni 2009
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Bestem alle komplekse tall $z = x+iy$ i det komplekse plan som tilfredstiller likheten

$$|z + 1 - i\sqrt{3}| = |z - 1 + i\sqrt{3}|.$$

Angi alle slike z på en figur.

Oppgave 2 Finn generell løsning til

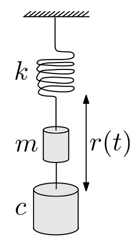
$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}.$$

Oppgave 3 Finn generell løsning til

$$x^2y'' - 2y = 16x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

(Vink: Det kan antas som kjent at $\displaystyle\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.)

Oppgave 4 Finn funksjonen $y(t)$ som tilfredstiller bevegelsesligningen gitt av et masse-fjær system med ytre kraft, med masse $m = 1$ kg, dempningskonstant $c = 4$ kg/s, fjærkonstant $k = 4$ kg/s^2, ytre kraft $r(t) = 2\cos 2t$ N og $y(0) = y'(0) = 0$. (Se bort fra tyngdekraften.)



Hva må dempningskonstanten c være lik for at vi skal få resonans?

Oppgave 5 La

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

b) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)$. Er det mulig å finne en vektor $\mathbf{c}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *ikke* har løsning?

c) La $V = \mathrm{Row}(A)$. Finn en basis for det ortogonale komplementet til V, $V^\perp$.

Gitt

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix},$$

skriv $\mathbf{y}$ på formen $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ der $\mathbf{y}_1$ ligger i V og $\mathbf{y}_2$ ligger i $V^\perp$.

(Vink: Se på den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ inn i $V^\perp$.)

Oppgave 6

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) På Vargøy er det sau og ulv. Sauene har ubegrenset med fôr, mens ulvene bare spiser sau. Ut fra observasjoner viser det seg at, hvis

$$S_n = \text{antall sau, og}$$
$$U_n = \text{antall ulv}$$

i år $2000 + n$, så er

$$S_{n+1} = 1{,}1S_n - 0{,}3U_n$$
$$U_{n+1} = 0{,}1S_n + 0{,}7U_n.$$

Hvis $S_0 = 102$ og $U_0 = 2$, finn et uttrykk for S_n og U_n, og vis at $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{U_n} = 3$.

Oppgave 7 Vis at Cauchy–Schwartz' ulikhet

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

(der $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ og $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$) er en *likhet* hvis og bare hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er lineært avhengige.

(Vink: La $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Vis da at en ikke kan ha $\|\mathbf{x} - k\mathbf{y}\| > 0$ for alle $k \in \mathbb{R}$ når $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.)