Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Fredag 4. desember 2009
løsningsforslag

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 4. januar 2010

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1, 2ab, 3ab, 4abc, 5, 6ab, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Finn alle løsningene til ligningen

$$z^5 = \frac{16\left(2\sqrt{3} - 1 - i(2+\sqrt{3})\right)}{2-i},$$

og tegn løsningene i det komplekse plan.

Først skal vi regne ut høyre side og skrive den på polar form. Vi får

$$w = \frac{16\left(2\sqrt{3} - 1 - i(2+\sqrt{3})\right)}{2-i} = \frac{16\left(2\sqrt{3} - 1 - i(2+\sqrt{3})\right)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$$

$$\frac{16\left(4\sqrt{3} - 2 + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - i - 4i - 2i\sqrt{3}\right)}{5} = 16(\sqrt{3} - i).$$

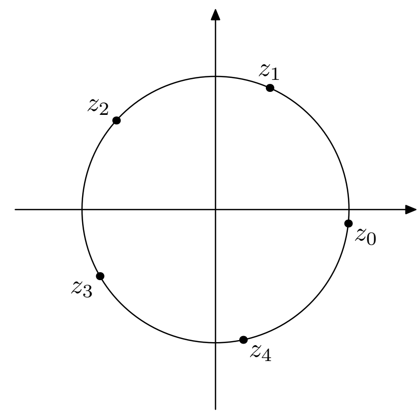
Da er $|w| = 16|\sqrt{3} - i| = 32$ og $\theta = \mathrm{Arg} w = \arctan(-1/\sqrt{3})$, siden w ligger i fjerde kvadrant. Vi har $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/6$ og følgelig er

$$w = 32e^{-i\frac{\pi}{6}} = 32\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right).$$

Nå skal vi finne løsningene til ligningen $z^5 = w$. De er gitt ved

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{-i(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{30}} = 2\cos(-\pi/30) + 2i\sin(-\pi/30),$$
$$z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{30}} = 2\cos(11\pi/30) + 2i\sin(11\pi/30),$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{23\pi}{30}} = 2\cos(23\pi/30) + 2i\sin(23\pi/30),$$
$$z_3 = 2e^{i\frac{35\pi}{30}} = 2\cos(7\pi/6) + 2i\sin(7\pi/6),$$
$$z_4 = 2e^{i\frac{47\pi}{30}} = 2\cos(47\pi/30) + 2i\sin(47\pi/30).$$



Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 6y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Den karakteristiske ligninger blir $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$, den har røtter $\lambda_{1,2} = 3 \pm 4i$ Generell løsning er $y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$. Vi setter inn initialbetingelsene og får $c_1 = 1$ og $3c_1 + 4c_2 = -1$, dette gir $\boxed{y(t) = e^{3x}(\cos 4x - \sin 4x).}$

b) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - 6y' + 25y = 20xe^x.$$

Vi finner en partikulær løsning først. I følge ubestemte coeffisientes metode har ligningen en partikulær løsning på formen $y(x) = (Ax + B)e^x$. Innsetting gir

$$y'' - 6y' + 25y = (20Ax - 4A + 20B)e^x.$$

så får vi $A = 1$ og $B = 0.2$, dermed $y_p = (x + 0.2)e^x$. Generell løsning har formen $y = y_p + y_h$ hvor y_h er generell løsning til den homogene ligningen. Svaret blir
$\boxed{y(x) = (x + 0.2)e^x + (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)e^{3x}.}$

Oppgave 3

a) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$x^2y'' + xy' - y = 4x,\ \ x > 0.$$

Dette er inhomogen Euler-Cauchy ligningen. Først løser vi den homogene ligningen $x^2y'' + xy' - y = 0$. Vi ser etter løsningene påformen $y = x^m$ hvor $m^2 - 1 = 0$. Vi har to løsninger $y_1 = x$ og $y_2 = x^{-1}$. For åfinne løsning til den inhomogene ligningen bruker vi variasjon av parametre. Wronskideterminanten blir $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = -2x^{-1}$. Vi skriver ligningen som

$$y'' + x^{-1}y' - x^{-2}y = 4x^{-1}$$

og skal finne løsning $y = uy_1 + vy_2$ hvor $u'y_1 + v'y_2 = 0$ og $u'y_1' + v'y_2' = 4x^{-1}$. Dette gir

$$u' = 2x^{-1} \quad \text{og} \quad v' = -2x.$$

Så$u = 2\ln x$, $v = -x^2$ og $\boxed{y = 2x\ln x - x^{-1}x^2 = 2x\ln x - x.}$

Alternativt svar: Vi ser at $\tilde{y} = 2x\ln x$ også er en partikulær løsning til ligningen.

b) Ligningen

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = 0,\ \ x > 0,$$

har en løsning $y_1(x) = x$. Finn en annen løsning y_2 slik at y_1 og y_2 er lineært uavhengige. Regn ut Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$.

Vi bruker reduksjon av orden og finner en annen løsning på formen $y_2 = uy_1 = ux$. Hvis ligningen er $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ så blir

$$u' = y_1^{-2}e^{-\int p dx}.$$

Vi har ligningen $y'' - (2x^{-1} + 1)y' + (2x^{-2} + x^{-1})y = 0$. Dette gir

$$u' = x^{-2}e^{\int(2x^{-1}+1)dx} = x^{-2}e^{2\ln x}e^x = e^x.$$

Så får vi $u = e^x$ og $\boxed{y_2 = xe^x.}$ Løsningene y_1 og y_2 er lineært uavhengige fordi $y_2/y_1 = e^x$ ikke er en konstant funksjon.

Wronskideterminanten blir $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \boxed{x^2e^x.}$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for radrommet Row(A).

Gausseliminasjon gir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Vi finner alle løsningene til ligningen $A\mathbf{x} = 0$. Med $x_2 = r$, $x_4 = s$ og $x_5 = t$ får vi $x_3 = s - 1.5t$ og $x_1 = 3r - s$. Generell løsning blir $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 1, 0, 0, 0)r + (-1, 0, 1, 1, 0)s + (0, 0, -1.5, 0, 1)t$. Da er $\boxed{\mathbf{u}_1 = (3, 1, 0, 0, 0),\ \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1, 1, 0),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, -1.5, 0, 1)}$ en basis for Null(A).

Ikkenullradene i E gir en basis for Row(A), $\boxed{\mathbf{r}_1 = (1, -3, 0, 1, 0),\ \mathbf{r}_2 = (0, 0, -2, 2, -3).}$

b) Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A) og en basis for det ortogonale komplementet til Col(A), Col$(A)^\perp$.

Kolonner til A som tilsvarer til de ledendevariabler danner en basis for Col(A), vi får: $\boxed{\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (0, -2, 6)}$.

For å finne en basis for Col$(A)^\perp$ skal vi løse systemet:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 0 & = & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} & = & & - & 2x_2 & + & 6x_3 \end{array}$$

Vi får $x_3 = a$, $x_2 = 3a$ og $x_1 = 5a$; $(x_1, x_2, x_3) = (5, 3, 1)a$. Basis for Col$(A)^\perp$ blir $\boxed{\mathbf{u} = (5, 3, 1).}$

c) Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

inn i Col(A).

Den orthogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i $\mathrm{Col}(A)^\perp$ er

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{35}{35}(5,3,1) = (5,3,1).$$

Da er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i $\mathrm{Col}(A)$ lik $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{q} = (6,1,2) - (5,3,1) = \boxed{(1,-2,1).}$

Alternativt: Vi finner en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$ ved å bruke Gramm-Schmidt på basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Vi får $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = (0,-2,6) - \frac{5}{3}(1,-2,1)$ og vi tar $\mathbf{u}_2 = (-5,4,13)$. Dette gir

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = (1,-2,1).$$

Alternativt: La

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Da har vi $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(C)$. Vi finner den ortogonale projeksjon av $\mathbf{b}$ inn i $\mathrm{Col}(C)$ ved den minste kvadraters metoden. Det tilhørende normalsystemet blir $C^TC\mathbf{x} = C^T\mathbf{b}$, dette er $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ og vi finner løsningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Så får vi $\mathbf{p} = C\mathbf{x} = (1,-2,1)$.

Oppgave 5 La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn $\det(A)$ og løs det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = 0$. Hva er rangen til A?

Vi har

$$\det(A) = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\cdot(-5) + 6\cdot 0 = 25.$$

Da har det homogene ligningssystemet en triviel løsning $\mathbf{x} = 0$. $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Row}(A) = 4$.

Oppgave 6

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finn egenverdiene til A og egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ slik at matrisen P med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er en ortogonal matrise med determinant 1.

Vi har $\det(A-\lambda I) = (7-\lambda)(-7-\lambda)-24^2 = \lambda^2-625$ og egenverdiene er $\lambda_1 = 25$ og $\lambda_2 = -25$. Vi finner tilsvarende egenvektorer:

$$A - 25I = \begin{bmatrix} -18 & 24 \\ 24 & -32 \end{bmatrix}, \quad A + 25I = \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{u}_1 = s(4,3)$, $\mathbf{u}_2 = t(-3,4)$. For å få en ortogonal matrise $P = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ med determinant 1, velger vi $s = t = 0.2$. Dette gir $\mathbf{u}_1 = (0.8, 0.6)^T$ og $\mathbf{u}_2 = (-0.6, 0.8)^T$.

b) Ligningen

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 40x - 30y = 0$$

beskriver et kjeglesnitt i xy-planet. Finn et rotert koordinatsystem (x', y'), der ligningen på kjeglesnitt er på formen

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + dx' + ey' = 0.$$

Hvilken type kjeglesnitt er det? Tegn de nye koordinataksene og kjeglesnitt i xy-planet.

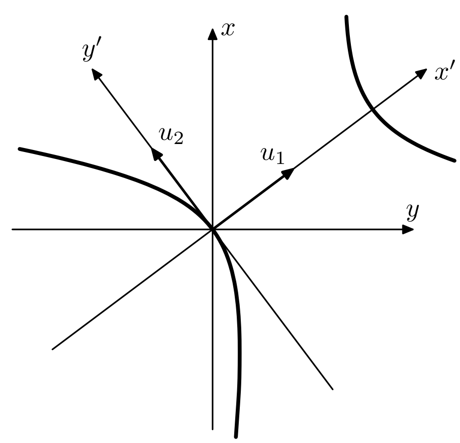
Vi skriver ligningen som $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = 0$ hvor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = [-40, -30]\,.$$

Vi setter inn $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ og får

$$25x'^2 - 25y'^2 - 50x' = 0,$$

eller $25(x'-1)^2 - 25y'2 = 25$, dette er ligningen av en $\boxed{\text{hyperbola } (x'-1)^2 - y'^2 = 1.}$ Tegningen ser sånn ut:



Oppgave 7 La A være en symmetrisk matrise og la $\mathbf{x}$ være en egenvektor til A. Vis at dersom $\mathbf{y}$ er en vektor som er ortogonal til $\mathbf{x}$ (det vil si $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$), så er vektoren $A\mathbf{y}$ også ortogonal til $\mathbf{x}$.

La λ være egenverdien som tilsvarer $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vi har
$\mathbf{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x}$. Matrisen A er symmetrisk, så er $A^T = A$ og

$$A\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \lambda\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = 0.$$