Komplekse tall: definisjon og regneregler

NTNU, Institutt for matematiske fag

August 18, 2009

Komplekse tall fra Wikipedia

Et komplekst tall er tall på formen $x + iy$, der x og y er reelle tall og i er den imaginære enheten, med egenskapen $i^2 = -1$.

Mengden av komplekse tall skrives vanligvis $\mathbb{C}$. Denne mengden inneholder de reelle tallene $\mathbb{R}$ som en delmengde, og innføringen av komplekse tall gir en naturlig utviding av begrepet reelle tall.

Mange assosierer komplekse tall med løsningen av andregradsligninger, som for eksempel ligningen $x^2 = -1$. Anvendelsesomrdet er imidlertid langt videre enn dette, og komplekse tall spiller en viktig rolle i mange deler av matematisk analyse og i anvendt matematikk.

Matematikk bruker en mer formell innføring av komplekse tall, basert på definisjon av operasjonene addisjon og multiplikasjon for komplekse tall.

Matematisk definisjon av komplekse tall

Formelt er et **komplekst tall** z innført som et ordnet par av reelle tall (x, y), definert med to operasjoner addisjon og multiplikasjon:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Et komplekst tall $z = (x, y)$ har en **reell del** $x = Re(z)$ og en **imaginær del** $y = Im(z)$.

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy$$

Dersom $x = 0$, sies tallet z å være **rent imaginært**.

Komplekse planet

Ethvert komplekst tall $(x, y) = x + iy$ kan representeres ved et punkt i et koordinatsystem.

Den horisontale og den vertikale aksen kalles henholdsvis den reelle aksen og den imaginære aksen. Punkt på den reelle aksen tilsvarer reelle tall, punkt p den imaginære aksen tilsvarer rent imaginære tall.

Komplekse tall bli innført i 16. århundre av italienske matematikerne (for å finne reelle løsninger av 3.grads ligninger).

Den geometriske tolkningen av et komplekst tall ble introdusert av den norske matematikeren Caspar Wessel i *Om directionens analytiske betegning*, 1797.

Komplekse tall på normalform

Normalform:

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad x = \mathrm{Re} z, \quad y = \mathrm{Im} z.$$

Operasjoner:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}.$$

Konjugerte tall, absoluttverdi

Komplekskonjugerte tall

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

$|z|$ er absoluttverdi til et komplekst tall z.

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Trekantulikheten

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Komplekskonjugering

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$