Gauss-Jordaneliminasjon, homogene lineære ligningssystem

E.Malinnikova, NTNU, Institutt for matematiske fag

September 18, 2009

Redusert echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

Redusert echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

En matrise kalles redusert echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.
3. Lederelementet i hver ikkenullrad er 1.
4. Hver lederelement er eneste element som ikke er lik 0 i sin kolonne.

Redusert echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

En matrise kalles redusert echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.
3. Lederelementet i hver ikkenullrad er 1.
4. Hver lederelement er eneste element som ikke er lik 0 i sin kolonne.

1-2: Echelonmatrise
1-4: Redusert echelon matrise

Gauss-Jordaneliminasjon for ligningssystem

Gausse-Jordanliminasjon:

1. Omforme totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

   til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner.

2. Hvis redusert echelonmatrisen inneholder en rad

$$0\ 0\ \dots\ 0\ |1$$

   så har systemet ingen løsning.

3. Ellers kan vi løse systemet med tilbakesubstitusjon.

Oppgave Bestem redusert echelonform for matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A:\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C:\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} D:\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semesterprøve oppgaver, 2007

Oppgave Hvilken av matrisene er på redusert echelon form?

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Semesterprøve oppgaver, 2007

Oppgave Hvilken av matrisene er på redusert echelon form?

$$A : \begin{bmatrix} {\color{red}1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B : \begin{bmatrix} {\color{red}1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} \end{bmatrix}$$

$$C : \begin{bmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D : \begin{bmatrix} {\color{red}1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} \end{bmatrix}$$

Antall løsninger til et lineær ligningssystem

Teorem Et lineært ligningssytem har ingen, en eller uendelig mange løsninger.

Antall løsninger til et lineær ligningssystem

Teorem Et lineært ligningssytem har ingen, en eller uendelig mange løsninger.

Et homogent lineært ligningssystem har minst en løsning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Antall løsninger til et lineær ligningssystem

Teorem Et lineært ligningssytem har ingen, en eller uendelig mange løsninger.

Et homogent lineært ligningssystem har minst en løsning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Et homogent lineært ligningssystem med flere ukjente enn ligninger har uendelig mange løsninger.

Antall løsninger til et lineær ligningssystem

Teorem Et lineært ligningssytem har ingen, en eller uendelig mange løsninger.

Et homogent lineært ligningssystem har minst en løsning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Et homogent lineært ligningssystem med flere ukjente enn ligninger har uendelig mange løsninger.

Et homogent linært ligningssystem med n ukjente og n ligninger har eksakt en løsning hvis og bare hvis koeffisientmatrisen til systemet er radekvivalent med identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$