Matriseoperasjoner

E.Malinnikova, NTNU, Institutt for matematiske fag

September 22, 2009

Addisjon av matriser

Hvis $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er matriser med samme størrelse, så er summen $A + B$ matrisen som vi får ved å legge sammen samsvarende elementer i A og B,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Addisjon av matriser

Hvis $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er matriser med samme størrelse, så er summen $A + B$ matrisen som vi får ved å legge sammen samsvarende elementer i A og B,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon av en matrise med et tall

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en matrise og c er et tall, så er cA matrisen som vi får ved å multiplisere hvert element i A med c,

$$cA = [ca_{ij}].$$

Multiplikasjon av en matrise med et tall

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en matrise og c er et tall, så er cA matrisen som vi får ved å multiplisere hvert element i A med c,

$$cA = [ca_{ij}].$$

Eksempel

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Indreprodukt

Hvis $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_p)$ og $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_p)$ er to p-vektorer, så er indreproduktet (skalarproduktet/prikkproduktet) tallet gitt ved

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_p v_p.$$

Produktet av en rad-vektor $\mathbf{a} = [a_1, ..., a_p]$ og en kolonne-vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ ... \\ b_p \end{bmatrix}$ er definert ved

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_1 b_1 + ... + a_p b_p]$$

Matrisemultiplikasjon

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $m \times p$ matrise og B er en $p \times n$ matrise, så er AB matrisen med størrelsen $m \times n$ der elementet i i-te rad og j-te kolonne er indreproduktet av i-te rad i A og j-te kolonne i B,

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}].$$

Matrisemultiplikasjon

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $m \times p$ matrise og B er en $p \times n$ matrise, så er AB matrisen med størrelsen $m \times n$ der elementet i i-te rad og j-te kolonne er indreproduktet av i-te rad i A og j-te kolonne i B,

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$$

Matrisemultiplikasjon

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $m \times p$ matrise og B er en $p \times n$ matrise, så er AB matrisen med størrelsen $m \times n$ der elementet i i-te rad og j-te kolonne er indreproduktet av i-te rad i A og j-te kolonne i B,

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + -2 \cdot 7 \\ -5 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 & -5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $m \times p$ matrise og B er en $p \times n$ matrise, så er AB matrisen med størrelsen $m \times n$ der elementet i i-te rad og j-te kolonne er indreproduktet av i-te rad i A og j-te kolonne i B,

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + -2\cdot 7 \\ -5\cdot 4 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 2 & -5\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -18 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon og lineære ligningssystem

Ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

kan skrives som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor A er koeffisientmatrisen og $\mathbf{b}$ er høresidevektoren til ligningssystemet, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad AB \neq BA$$

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad AB \neq BA$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$$

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad AB \neq BA$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$$

Hvis A er en $m \times n$ matrise så er

$$AI_n = I_m A = A,$$

hvor I_n og I_m er $n \times n$ og $m \times m$ identitesmatrisene.

Inverse matriser

Definisjon En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det finnes en matrise B slik at $AB = BA = I$ der I er identitetsmatrisen.

Inverse matriser

Definisjon En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det finnes en matrise B slik at $AB = BA = I$ der I er identitetsmatrisen.

Hvis A er en inverterbar matrise, så er det nøyaktig én matrise B slik at $AB = BA = I$. Den kalles den inverse til A og betegnes A^{-1}.

Inverse matriser

Definisjon En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det finnes en matrise B slik at $AB = BA = I$ der I er identitetsmatrisen.

Hvis A er en inverterbar matrise, så er det nøyaktig én matrise B slik at $AB = BA = I$. Den kalles den inverse til A og betegnes A^{-1}.

Hvis A er inverterbar, så er A^{-1} inverterbar, og $(A^{-1})^{-1} = A$.