Inverse matriser

E.Malinnikova, NTNU, Institutt for matematiske fag

September, 2009

Inverse 2×2 matriser

En 2×2 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og da er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Inverse 2×2 matriser

En 2×2 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og da er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse $n \times n$ matriser

La A være en $n \times n$ matrise. For å finne A^{-1} omformer vi $n \times 2n$ matrisen

$$[A|I]$$

til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner. Hvis A er inverterbar, vil den reduserte echelonmatrisen være

$$\left[I|A^{-1}\right].$$

Inverse $n \times n$ matriser

La A være en $n \times n$ matrise. For å finne A^{-1} omformer vi $n \times 2n$ matrisen

$$[A|I]$$

til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner. Hvis A er inverterbar, vil den reduserte echelonmatrisen være

$$\left[I|A^{-1}\right].$$

Regler:

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

Inverse $n \times n$ matriser

La A være en $n \times n$ matrise. For å finne A^{-1} omformer vi $n \times 2n$ matrisen

$$[A|I]$$

til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner. Hvis A er inverterbar, vil den reduserte echelonmatrisen være

$$\left[I|A^{-1}\right].$$

Regler:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Inverse matriser og lineære ligningssystem

Hvis A er en kvadratisk matrise og A er inverterbar, så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

eksakt en løsning

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Inverse matriser og lineære ligningssystem

Hvis A er en kvadratisk matrise og A er inverterbar, så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

eksakt en løsning

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Teorem La A være en kvadratisk matrise. Følgende betingelser er ekvivalente:

1. A er inverterbar,
2. A er radekvivalent med identitesmatrisen I,
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen $\mathbf{x} = 0$,
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{b}$.

Oppgave For hvilke a og b har ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & b^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b \\ 2b-1 \\ a+b+1 \end{bmatrix}$$

uendelig mange løsninger?

Oppgaver fra tidligere semesterprøver

Oppgave For hvilke a og b har ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & b^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b \\ 2b-1 \\ a+b+1 \end{bmatrix}$$

uendelig mange løsninger?

Oppgave Gitt tre inverterbare kvadratiske matriser A, B og C som oppfyller $AB = C$. Hva er A^{-1} uttrykt ved B og C.

Oppgaver fra tidligere semesterprøver

Oppgave Hva blir $A^{-1} + B^{-1}$ hvis $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$?

DETERMINANTER

Determinanter til 2×2 og 3×3 matriser

Determinanten til en 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinanter til 2×2 og 3×3 matriser

Determinanten til en 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinanten til en 3×3-matrise $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ er

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Determinanter

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrise.

Determinanter

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrise.

Minoren M_{ij} er determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-undermatrisen i A som vi får ved å stryke i-te rad og j-te kolonne i A.

Determinanter

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrise.

Minoren M_{ij} er determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-undermatrisen i A som vi får ved å stryke i-te rad og j-te kolonne i A.

Kofaktoren A_{ij} er definert ved $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Determinanter

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrise.

Minoren M_{ij} er determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-undermatrisen i A som vi får ved å stryke i-te rad og j-te kolonne i A.

Kofaktoren A_{ij} er definert ved $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Determinanten til A er definert ved

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Determinanter

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrise.

Minoren M_{ij} er determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-undermatrisen i A som vi får ved å stryke i-te rad og j-te kolonne i A.

Kofaktoren A_{ij} er definert ved $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Determinanten til A er definert ved

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Teorem Determinanten til en $n \times n$-matrise kan beregnes ved kofaktorutvikling langs enhver rad eller kolonne:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Regneregler for determinanter

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.
2. Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.

Regneregler for determinanter

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.
2. Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.
3. Hvis to rader (eller to kolonner) i A er like så er $\det(A) = 0$.

Regneregler for determinanter

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.
2. Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.
3. Hvis to rader (eller to kolonner) i A er like så er $\det(A) = 0$.
4. Hvis B fås fra A ved å addere et konstant multiplum av én rad i A til en annen rad i A så er $\det(B) = \det(A)$.

Regneregler for determinanter

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.
2. Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.
3. Hvis to rader (eller to kolonner) i A er like så er $\det(A) = 0$.
4. Hvis B fås fra A ved å addere et konstant multiplum av én rad i A til en annen rad i A så er $\det(B) = \det(A)$.
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Regneregler for determinanter

Regneregler

1. Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant c så er $\det(B) = c\det(A)$.
2. Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.
3. Hvis to rader (eller to kolonner) i A er like så er $\det(A) = 0$.
4. Hvis B fås fra A ved å addere et konstant multiplum av én rad i A til en annen rad i A så er $\det(B) = \det(A)$.
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
6. $\det(A^T) = \det(A)$

Flervalgsoppgaver

Oppgave Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for en 2×2 matrise?
(1) Hvis $A^2 = 0$ så er $\det(A) = 0$.
(2) Hvis $\det(A) = 1$ så er $\det(2A) = 2$.

A: verken (1) eller (2) B: bare (1) C: bare (2) D: både (1) og (2)

Flervalgsoppgaver

Oppgave Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for en 2×2 matrise?
(1) Hvis $A^2 = 0$ så er $\det(A) = 0$.
(2) Hvis $\det(A) = 1$ så er $\det(2A) = 2$.

A: verken (1) eller (2) B: bare (1) C: bare (2) D: både (1) og (2)

Oppgave For hvilke(n) k er matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{bmatrix}$$

inverterbar?

A: $k \neq 3$ B: $k = 1$ C: $k \neq 1$ D: $k > 3$