Lineær uavhengighet

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Lineær kombinasjon

En vektor $\mathbf{w}$ sies å være en lineær kombinasjon av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ hvis det finnes tall $c_1, ..., c_k$ slik at

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k.$$

Lineær kombinasjon

En vektor $\mathbf{w}$ sies å være en lineær kombinasjon av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ hvis det finnes tall $c_1, ..., c_k$ slik at

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k.$$

Teorem Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er vektorer i et vektorrom V så er mengde W av alle lineære kombinasjoner av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ et underrom i V.

Vi sier at W er utspent av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ og skriver

$$W = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_\mathrm{k}\}.$$

Lineært uavhengige vektorer

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Lineært uavhengige vektorer

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært avhengige hvis det finnes $c_1, c_2, ...c_n$, ikke alle null, slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Vektorer i $\mathbf{R}^n$

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, har determinant ulik null, $\det(A) \neq 0$.

Vektorer i $\mathbf{R}^n$

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, har determinant ulik null, $\det(A) \neq 0$.

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er k vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$, $k < n$, lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times k$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$, $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k]$, inneholder en $k \times k$ matrise med determinant ulik null.